

Räumliche und zeitliche Integration multisensoraler Zeitreihen zur Ableitung von Höhenänderungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von
Andra Hirsemann
aus Hoyerswerda

vorgelegt bei der
Fakultät für Energie- und Wirtschaftswissenschaften
der Technischen Universität Clausthal
Clausthal-Zellerfeld, 15. Februar 2012

Mitglieder der Promotionskommission:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Busch (Hauptberichterstatter)

Prof. Dr.-Ing. habil. Anton Sroka (Mitberichterstatter)

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die bei der Fakultät für Energie- und Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Clausthal eingereichte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe.

Die benutzten Hilfsmittel sind vollständig angegeben.

Clausthal-Zellerfeld, 15. Februar 2012

Andra Hirsemann

Zusammenfassung

In Verbindung mit der Gewinnung von Rohstoffen und der Stilllegung des Bergbaus und der gegebenenfalls anschließenden Wiedernutzbarmachung der zuvor beanspruchten Landschaft treten Bewegungen an der Tagesoberfläche auf. Diese Bewegungen müssen aufgrund gesetzlicher Regelungen beobachtet und erfasst werden. Die vertikalen Veränderungen werden bisher durch Präzisionsnivellements bestimmt. Diese haben den Nachteil, dass die Bewegungen meist nur an linienhaften, ausgewählten Objekten der Infrastruktur erfasst werden. In den letzten Jahren gibt es verstärkt Anstrengungen diese Bewegungen mittels der Radarinterferometrie zu erfassen. Diese Methode liefert die Möglichkeit flächenhafte Aussagen treffen zu können. Dies kann allerdings durch atmosphärische Störungen, sich schnell ändernden Bewuchs oder Schneebedeckung stark erschwert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Wege vorgestellt, wie diese beiden Messverfahren kombiniert werden können. Dabei werden zwei grundlegend verschiedene Ausgangspunkte behandelt. Im ersten Fall müssen die Messungen nahezu zeitgleich erfolgen. Dann ist es möglich, die durch Nivellement gemessenen Höhenunterschiede zwischen Punkten zu einem Zeitpunkt und die durch Radarinterferometrie an einem Punkt zu verschiedenen Zeiten bestimmten Höhenänderungen zusammen auszugleichen. Die gesuchten Unbekannten sind die Höhen an einem Punkt zu einer Zeit. Das für diesen Fall entwickelte Programmpaket bietet neben der gemeinsamen Ausgleichung von Nivellement und Radarinterferometrie, auch die Möglichkeit nur ein Messverfahren auszugleichen. So hat die alleinige Auswertung von radarinterferometrisch bestimmten Höhenänderungen gezeigt, dass eine Einführung von Gewichten bezogen auf die räumliche Basislinie sinnvoll ist. Basislinien mit geringen Gewichten haben keinen nennenswerten Einfluss auf die Unbekannten, sie können aber dazu dienen Konfigurationsdefekte zu vermeiden. Bei einer gemeinsamen Ausgleichung beider Beobachtungsgruppen kann über Varianzkomponentenschätzung das Verhältnis der Genauigkeiten zueinander bestimmt werden.

Das zweite Programmpaket findet Anwendung, wenn eine zeitgleiche Messung mit den beiden Verfahren nicht realisiert werden kann. Dafür ist es allerdings notwendig, dass sich die zwei Zeitreihen der verschiedenen Sensoren überschneiden. Nach der Interpolation einer Messreihe wird der Verschiebungsbetrag für die zweite Zeitreihe bestimmt. Zur Interpolation wurde die Akima-Interpolation benutzt. Kenntnisse über ein Bewegungsmodell sind daher nicht notwendig. Diese Art der Interpolation berücksichtigt den Verlauf benachbarter Intervalle, ohne dabei die Schwingungen herkömmlicher Splines aufzuweisen. Der Verschiebungsbetrag ergibt sich als gewichtetes arithmetisches Mittel der Abstände zur Interpolation. Die Gewichte beschreiben dabei die Lage und die Verteilung der Messpunkte zueinander. Durch Simulationen von Zeitreihen mit unterschiedlichem Verlauf, verschiedenen Punktzahlen und variierend streuenden Messwerten wurde eine Strategie über die Zuordnung von interpolierender und einzupassender Messreihe erarbeitet. Diese haben ergeben, dass zuerst in die weniger verrauschte Reihe einzupassen ist. Ist die Streuung beider Reihen gleich stark, wird die Messreihe mit der höheren Punktzahl interpoliert. Die entwickelte Software prüft, ob sich der gemeinsame Bereich über mehrere zu interpolierende Intervalle erstreckt oder nur ein Randintervall umfasst. In diesem Fall erzeugt eine lineare Interpolation bessere Ergebnisse. Zusätzlich wird geprüft, ob einzelne Punkte mit sehr großen Gewichten den Verschiebungsbetrag stark beeinflussen, da dann ein einfaches arithmetisches Mittel zu bevorzugen ist. Die Berechnung approximierender Polynome durch die entstandenen gemeinsamen Zeitreihen zeigt, dass diese als eine behandelt werden können, um die auftretenden Bewegungen zu beschreiben.

Summary

In connection with the extraction of raw materials, the closure of mining industry and following recultivation of areas affected by mine-related activities of the claimed landscape movements occur on the ground surface. These movements have to be observed and recorded for statutory purposes. At the moment the vertical movements are determined by geodetic levelling. The disadvantage of this technique is that movements can only be measured inline by way of infrastructural objects. In recent years efforts have been increased to measure these movements by means of radar interferometry. This method provides the possibility of areal measurements. Measurements can be affected by atmospheric conditions, rapidly changing vegetation or snow-coverage.

In this paper methods are presented, how to combine these two measurement methods. Two fundamentally different starting points will be discussed. In the first case, the measurements have to be done almost at the same time. In this case it is possible to adjust the height differences measured by levelling between different points at a time and altitude changes measured by radar interferometry at a point at different times together. The unknowns of the calculations are the heights at a point at a time. The program package developed for this case offers the common adjustment and the possibility to evaluate only one measurement method. The exclusive evaluation of measurements of radar interferometry showed that the introduction of weights due to the spatial baseline is reasonable. Baselines with low weights have no significant impact on the unknowns, but they can serve to avoid defects of configuration. In a common adjustment of both observation groups, the ratio of accuracy to each other is determined by the estimation of variance components.

The second program package is applicable, if a simultaneous measurement can not be realized. For this purpose, it is necessary that two time series of different sensors are overlapping. After interpolation of a measurement series, a displacement vector for the second time series can be determined. In case of the used Akima interpolation the knowledge of a motion model is not necessary. This kind of interpolation considered the progress in adjacent intervals, without swinging like traditional splines. The displacement vector is calculated as the weighted arithmetic mean of the distances for interpolation, where the weights are derived from the location and distribution of measurement points. By simulations with time series with different characteristics, different point counts and measurements of varying statistical spread, a strategy was developed over the allocation of interpolating and adapted time series. This shows that the less noisy series is interpolated. For measurements with the same standard deviation, the time series with the larger number is interpolated. The developed software checks to see whether the area of the overlapping measurement over several intervals extends or includes only a marginal interval because then a linear interpolation creates better results. Additionally it is checked whether a few points have, in relation to the other, disproportionately large weights, in these cases the elimination of the weights is useful. By calculating polynomials approximating through the resulting common time series it was shown that these can be treated as one, to describe the movements occurring.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
1.1	Motivation und Zielsetzung	1
1.2	Gliederung der Arbeit.....	2
2	Kombination von Messungen mit gleichen Zeitpunkten	4
2.1	Grundlagen der Ausgleichungsrechnung	6
2.2	Detektion von Rangdefekten	16
2.3	Untersuchungsgebiet.....	17
2.4	Ausgleichung einzelner Zeitreihen der Radarinterferometrie.....	18
2.4.1	Suche nach unabhängigen Punkten	18
2.4.2	Ausgleichung der Höhenänderungen.....	19
2.4.3	Ausgabe der Ergebnisse	25
2.5	Gemeinsamen Ausgleichung von nivellierten Höhenunterschieden und radarinterferometrisch bestimmten Höhenänderungen	26
2.5.1	Iterative Varianzkomponentenschätzung mit gewichteten Beobachtungen	29
2.5.2	Iterative Varianzkomponentenschätzung mit ungewichteten Beobachtungen	42
2.6	Zusätzliche Anwendungsmöglichkeiten der Ausgleichungsrechnung	44
2.6.1	Korrektur von Phasensprüngen.....	44
2.6.2	Verbinden getrennter Messbereiche	46
3	Kombination von Zeitreihen mit unterschiedlichen Zeitpunkten	48
3.1	Grundlagen der Interpolation	49
3.1.1	Lineare Interpolation	49
3.1.2	Akima-Interpolation	52
3.1.3	Einführung von Gewichten	55
3.2	Einpassen von Testdaten durch Interpolation	59
3.2.1	Auswahl der Testdatenreihen	59
3.2.2	Ergebnis der Interpolation mit den simulierten Messreihen	61
3.3	Beispiele der Interpolation mit den realen Messreihen	68
3.4	Diskussion der Ergebnisse	75
4	Zusammenfassung	78
	Literaturverzeichnis	81

Abbildungsverzeichnis.....	85
Tabellenverzeichnis.....	89
Verzeichnis der verwendeten Variablen.....	90
Abkürzungsverzeichnis	93
Danksagung	94
A. Implementierung der Programmpakete	95
A.1 Implementierung der Ausgleichung und Varianzkomponentenschätzung.....	95
A.2 Implementierung der Kombination zweier Messreihen.....	105

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

In Zusammenhang mit der untertägigen Rohstoffgewinnung, dem Fluten stillgelegter Bergwerke oder den Veränderungen des Grundwasserspiegels im Bereich von Tagebauen kommt es zu großräumigen Bewegungen an der Tagesoberfläche.

Hohlräume infolge untertägigen Abbaus werden durch den überlagernden Gebirgsdruck wieder geschlossen. Diese Deformation setzt sich bis an die Tagesoberfläche fort und führt zu einem Senkungstrog. Bei Gas- und Ölfeldern nimmt der Lagerstättendruck in der Förderzeit ab. Dies führt ebenfalls zu Senkungen an der Oberfläche (Kratzsch 1997). Flutungen von untertägigen Hohlräumen oder Druckanstiege aufgrund veränderter Injektionsrichtungen in der Lagerstätten führen umgekehrt zu Hebungen an der Tagesoberfläche (Baglikow 2003; Fenk 1997; Mühlenbeck 2005).

Für den Betrieb von Tagebauen muss der Grundwasserspiegel abgesenkt werden. Dabei sind das Ausmaß und die Ausdehnung des beeinflussten Bereiches stark angewachsen, da moderne Großtagebaue großflächig angelegt sind und ihre Abbauteufe zugenommen hat. Die dafür notwendigen Sumpfungsmaßnahmen führen in den grundwasserleitenden Schichten zu einem Auftriebsverlust und einem Anstieg der Eigengewichtsbelastung, wodurch Setzungen auftreten (Fenk 1993). Nach Beendigung der Abbautätigkeit werden im Rahmen der Rekultivierung die Tagebaurestlöcher wieder geflutet. Der damit verbundene Anstieg des Grundwassers führt zu Hebungen an der Oberfläche (Schade 2004).

Diese Deformationen an der Tagesoberfläche müssen erfasst werden. Dies ergibt sich aus den Nebenbestimmungen UVP-pflichtiger Betriebspläne (BBergG 2009). Die vertikalen Bewegungen sind bisher über Präzisionsnivellements bestimmt worden. Diese werden von den Bergbaubetreibern durchgeführt. Die Nivellements haben den Nachteil, dass durch sie die Bewegungen immer nur an ausgewählten Objekten der Infrastruktur, erfasst werden können [vergleiche (Busch und Hirsemann 2007)]. In den letzten Jahren gibt es zunehmend Bemühungen, diese großräumigen Bewegungen mittels der Radarinterferometrie erfassen zu können. Dieses Verfahren bietet die Möglichkeit der flächenhaften Auswertung. Dabei ermöglichen verschiedene Wellenlängen Messungen in Gebieten unterschiedlicher Bebauung und Vegetation. Für die Auswertung müssen die Satellitenaufnahmen so gewählt werden, dass die Bewegungsraten an der Oberfläche zu den Abständen der Aufnahmen und den Wellenlängen passen. Durch atmosphärische Störungen, stark veränderte Vegetation oder zu schnelle Bewegungen sind die Auswertungen allerdings nicht immer möglich. Auch Schnee an der Oberfläche kann die Anwendung der Radarinterferometrie erschweren (Knospe, Hebel et al. 2011; Schäfer, Busch et al. 2007; Spreckels, Walter et al. 2008).

In dieser Arbeit werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie beide Messverfahren, das Nivellement und die Radarinterferometrie, auswertetechnisch kombiniert werden können. Beide Verfahren messen Höhendifferenzen. Beim Nivellement werden Höhenunterschiede zu einem Zeitpunkt zwischen Punkten gemessen. Bei der Radarinterferometrie sind es

Höhenänderungen, die an einem Punkt zwischen verschiedenen Zeitpunkten bestimmt werden. Wird nun an identischen Punkten zu gleichen Zeitpunkten gemessen, ist eine gemeinsame Ausgleichung beider Messungen möglich. Kann eine Messung zu gleichen Zeitpunkten nicht realisiert werden, wird im zweiten Teil der Arbeit eine Möglichkeit vorgestellt, Messreihen über Interpolation zu kombinieren, ohne dass ein Bewegungsmodell bekannt sein muss.

1.2 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird ein Verfahren zur gemeinsamen Ausgleichung von nivellitisch und radarinterferometrisch bestimmten Höhendifferenzen vorgestellt. Dieses Verfahren kann dann Anwendung finden, wenn die gemessenen Differenzen der beiden verschiedenartigen Messmethoden an identischen Punkten zu identischen Zeiten stattfinden. Im vorliegenden Beispiel fand das Nivellement immer an den Tagen direkt vor oder nach einem Satellitenüberflug statt. Aufgrund der geringen Bewegungsraten im Untersuchungsgebiet war diese zeitliche Nähe ausreichend. Ebenso wichtig ist die gleiche Lage der Messpunkte. Dazu gehört auch eine gleiche Gründung der Punkte. Messpunkte mit Gründungen in unterschiedlicher Tiefe oder sogar Messpunkte in verschiedenen Höhen an Gebäuden können verschiedene Bewegungen ausführen, so dass eine gemeinsame Ausgleichung dann nicht mehr sinnvoll ist (Kapitel 2). In Kapitel 2.3 wird das Untersuchungsgebiet mit seinen Messpunkten ausführlicher vorgestellt. Anschließend werden die Grundlagen der Ausgleichungsrechnung, der Varianzkomponentenschätzung und der Graphentheorie zusammengefasst dargestellt. In Kapitel 2.4 werden die Ergebnisse der Ausgleichung einzelner Zeitreihen vorgestellt. Anschließend wird auf die gemeinsame Auswertung beider Messverfahren eingegangen. In Kapitel 2.6 werden weitere Anwendungen zum sinnvollen Einsatz der Ausgleichungsrechnung aufgezeigt. Dies umfasst die Korrektur von Phasensprüngen und die Überbrückung von Lücken, wenn beispielsweise durch Schneebedeckung Auswertungen nicht möglich sind. Im letzten Abschnitt dieses Teils der Arbeit werden die Ergebnisse der Varianzkomponentenschätzung diskutiert. Dabei wird vor allem auf die Veränderungen der Standardabweichung der Beobachtungen und der Unbekannten im Verlauf der Iteration eingegangen.

Im zweiten Abschnitt der Arbeit (Kapitel 3) wird die Kombination zweier Zeitreihen behandelt, die nicht zu gleichen Zeitpunkten durchgeführt wurden. Aber auch bei diesem Verfahren ist darauf zu achten, dass die Zeitreihen zu identischen Punkten gehören. Angewandt werden kann diese Methode bei Messreihen, die ihre Nullmessung zu unterschiedlichen Zeiten haben und zur Kombination von Messungen unterschiedlicher Satelliten. Realisiert wird das Einpassen über die Interpolation einer der Messreihen und Berechnung eines Verschiebungsbetrages, um den die Werte der zweiten Reihe verändert werden. Bei diesem Verfahren ist es nicht notwendig, Kenntnisse über ein konkretes Bewegungsmodell zu haben. Es ist ein Programmpaket entstanden, dass sich bei der Kombination zweier Messreihen weniger auf die Subjektivität des Auswerter stützt, sondern das auf den Charakteristiken der Messreihen beruht.

Hierfür wird in Kapitel 3.1.2 die Akima-Interpolation vorgestellt. Sie besteht aus zusammengesetzten Funktionen dritten Grades, die im Gegensatz zu herkömmlichen Splines nicht schwingen. Im darauf folgenden Abschnitt wird mit simulierten Messreihen eine Strategie zum Einpassen der Messreihen erarbeitet. Hierfür werden Testdaten unterschiedlicher Bewegungsmodelle sowie Anzahl an Messwerten verwendet. Außerdem werden diese Messwerte verschiedenartig auf die zu interpolierende und einzupassende Messreihe verteilt. Ferner werden die Messreihen mit unterschiedlich starken Rauschsignalen überlagert. Die mit diesen Simulationen entwickelte Vorgehensweise wird abschließend an realen Daten getestet.

Im Anhang dieser Arbeit befinden sich Ausführungen zur Implementierung der entstandenen Programme mit Flussdiagrammen, Beschreibungen der einzelnen Funktionen und Übersichten der Ein- und Ausgangsvariablen.

2 Kombination von Messungen mit gleichen Zeitpunkten

Beim Nivellement und bei der Radarinterferometrie werden Höhenunterschiede und Höhenänderungen gemessen. Durch beide Verfahren werden keine absoluten Höhen bestimmt, sondern Höhendifferenzen. Beim Nivellement werden zu einem bestimmten Zeitpunkt die Höhenunterschiede zwischen zwei Punkten gemessen (Abbildung 2.1).

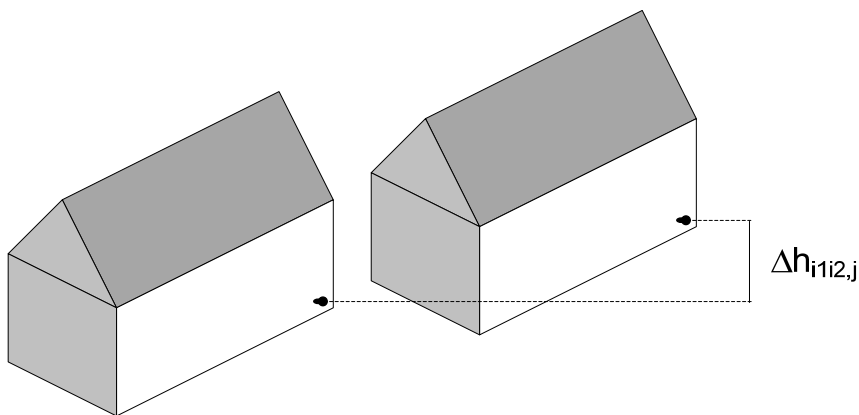


Abbildung 2.1:
Durch Nivellement
bestimmter
Höhenunterschied
zwischen zwei
Punkten zu einem
Zeitpunkt

Mit der Radarinterferometrie wird ein Punkt zu unterschiedlichen Zeitpunkten beobachtet (Abbildung 2.2).

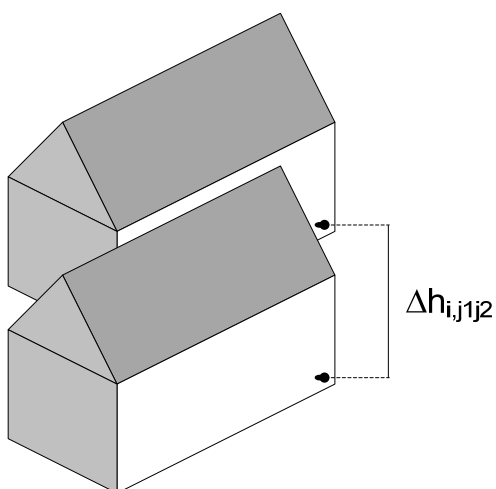


Abbildung 2.2: Durch Radarinterferometrie
bestimmte Höhenänderung eines Punktes
zu zwei Zeitpunkten

In beiden Fällen wird demnach ein Δh bestimmt. Somit ist neben der Ausgleichung einer einzelnen Messungsart (Nivellementnetzes, Zeitreihe der Radarinterferometrie) die gemeinsame Ausgleichung beider Messverfahren möglich. Dabei wird durch die ermittelten Δh ein Netz in Raum und Zeit aufgespannt.

Die Unbekannten der Ausgleichung sind die Höhen H_{ij} eines Punktes i zu einem Zeitpunkt j . Ihre absolute Höhe bekommen die Punkte über den Anschlusspunkt des Nivellements zugewiesen. Diese wird, wenn sie nicht weiter bekannt ist, mit 0 angenommen.

Das Netz aus Höhendifferenzen in Raum (Nivellement) und Zeit (Radarinterferometrie) ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Die Höhenunterschiede zwischen den Punkten (P_1 bis P_6) wurden zu den Zeitpunkten t_1 , t_3 und t_6 gemessen. Das Nivellement wird immer an den Anschlusspunkt A mit einer bekannten Höhe angeschlossen. Die Punkte sind im Gelände vermarktet und sind so für die verschiedenen Messungen identisch.

Die in der nachfolgenden Abbildung dargestellten Punkte P_1 bis P_6 werden zu den Zeiten t_1 bis t_7 beobachtet. Im untersuchten Beispiel handelt es sich dabei um die für die Radarauswertung aufgestellten Corner-Reflektoren (siehe Kapitel 2.3), die in den Radarbildern eindeutig identifiziert werden können.

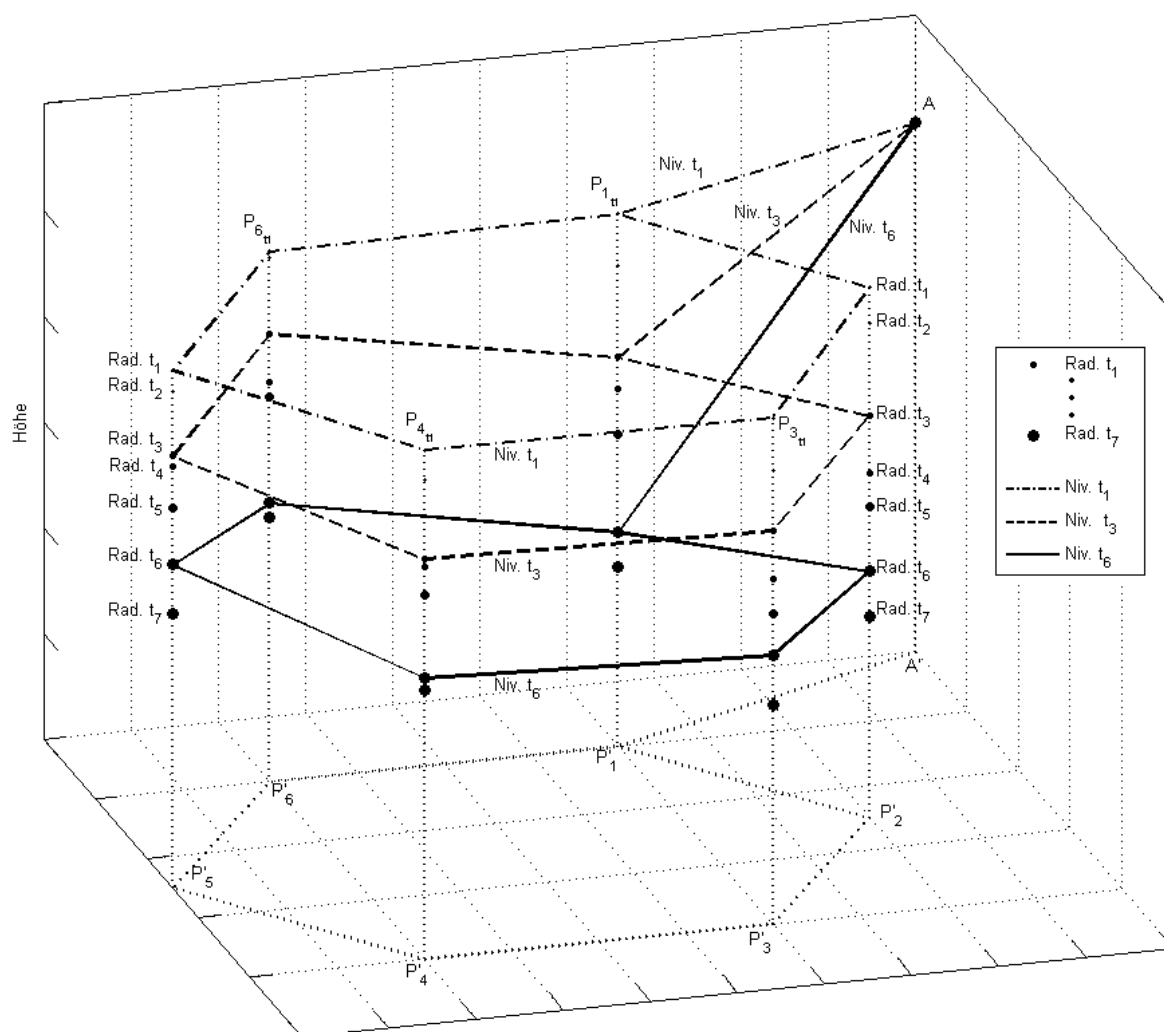


Abbildung 2.3: Prinzip der gemeinsamen Ausgleichung von Radardaten und Nivellement

Beim untersuchten Beispiel im Emsland (Kapitel 2.3) sind die gegründeten Stahlrohre des Nivellementpunktes und des Corner-Reflektors identisch. Die Nivellements fanden zeitnah zu den Aufnahmen des Satelliten statt. Da es keinen räumlichen Unterschied gibt und durch die geringen Bewegungsraten kleine zeitliche Abweichungen vernachlässigbar sind, kann die

Höhe eines Punktes zu einem Zeitpunkt als Unbekannte in einer gemeinsamen Ausgleichung der mit beiden Verfahren ermittelten Messwerte eingeführt werden.

In den folgenden Abschnitten werden die Grundlagen dieser Berechnungen vorgestellt. Dabei werden die Grundlagen der Ausgleichungsrechnung mit funktionalem und stochastischem Modell, der Statistik und der Graphentheorie bereitgestellt.

2.1 Grundlagen der Ausgleichungsrechnung

In der Geodäsie und in der Fernerkundung können die unbekannten Größen (Koordinaten von Punkten) häufig nicht direkt gemessen werden, sondern müssen aus anderen messbaren, beobachtbaren Größen (Strecken, Winkel, Höhenunterschiede, Informationen eines Bildpunktes) abgeleitet werden. Zwischen den Unbekannten und den Beobachtungen besteht ein funktionaler Zusammenhang. Die u zu bestimmenden, unbekannten Parameter werden im Unbekanntenvektor $\hat{\mathbf{X}}$, der die Dimension $(u,1)$ aufweist, zusammengefasst. Der $(n,1)$ -Beobachtungsvektor \mathbf{L} beinhaltet die n gemessenen Größen. Für eine Ausgleichung ist es notwendig, dass dieses System überbestimmt ist, es muss $n > u$ gelten. Entspricht die Anzahl der Beobachtungen der Anzahl der Unbekannten ist die Abbildung der Beobachtungen auf die Unbekannten eindeutig. In diesem Fall besteht jedoch keine Möglichkeit zur Kontrolle der Messungen. Aussagen zur Genauigkeit können ebenfalls nicht getroffen werden. Treten mehr Unbekannte als Beobachtungen auf, ist das System nicht ohne zusätzliche Festlegungen lösbar (Niemeier 2008).

Funktionales Modell

Das funktionale Modell beschreibt den mathematischen Zusammenhang zwischen den „wahren“ Werten der Beobachtungen \tilde{L}_i (zusammengefasst im Vektor $\tilde{\mathbf{L}}$) und den „wahren“ Werten der Unbekannten \tilde{X}_j (Vektor $\tilde{\mathbf{X}}$). Dabei wird jede der n Beobachtungen als Funktion der u Unbekannten ausgedrückt.

$$\tilde{\mathbf{L}} = f(\tilde{\mathbf{X}}) \text{ bzw.} \quad (2-1)$$

$$\tilde{L}_i = f_i(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u)$$

Da jedoch jede Beobachtung mit einer Messunsicherheit behaftet ist, ist eine Bestimmung der „wahren“ Werte dieser Größe nicht möglich. Sie können nur geschätzt, das heißt durch die Ausgleichung bestimmt werden (\hat{L}_i für die Beobachtung i und $\hat{\mathbf{L}}$ als Beobachtungsvektor). Diese berechnen sich aus den tatsächlichen Beobachtungen L_i (Vektor \mathbf{L}) durch Anbringen von Verbesserungen v_i (Vektor \mathbf{v}) (Lothar und Strehle 2007; Niemeier 2008).

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} = f(\hat{\mathbf{X}}) \text{ oder} \quad (2-2)$$

$$\hat{L}_i = L_i + v_i = f_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u)$$

mit \hat{X}_j geschätzte Unbekannte

Aus dieser Gleichung ergeben sich durch Umstellen die Verbesserungsgleichungen:

$$\mathbf{v} = f(\hat{\mathbf{X}}) - \mathbf{L} \quad \mathbf{v} = f(\hat{\mathbf{X}}) - \mathbf{L} \text{ oder} \quad (2-3)$$

$$v_i = f_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) - L_i$$

In der Regel müssen diese Gleichungen über Taylorreihenentwicklung linearisiert werden. Bei den in dieser Arbeit behandelten Beispielen ist dies nicht nötig, da die auftretenden funktionalen Zusammenhänge in den ursprünglichen Gleichungen bereits linear sind. Die Unbekannten treten nur in einem Produkt mit beliebigen reellen Koeffizienten a oder in einer Summe auf. Der Koeffizient a ist damit direkt Bestandteil der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} (Lothar und Strehle 2007). Diese Konstanten werden gemäß ihrer Zugehörigkeit zur Beobachtung L_i und der Unbekannten \hat{X}_j mit a_{ij} bezeichnet.

$$\Delta h_{2,1} = H_1 - H_2 \quad (2-4)$$

mit Δh Höhenunterschied, -änderung
 H Höhe eines Punktes, Höhe zu einem Zeitpunkt

Die Koeffizienten nehmen demnach die Werte $a_1 = 1$ und $a_2 = -1$ an.

Aufgrund der Linearität der Verbesserungsgleichungen ist eine Zerlegung der Unbekannten und der tatsächlichen Beobachtungen in Näherungs- und verkürzte Werte wie in den folgenden Gleichungen dargestellt nicht notwendig.

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{x}} \quad (2-5)$$

mit \mathbf{X}^0 Vektor der Näherungswerte der Unbekannten
 $\hat{\mathbf{x}}$ Vektor der stochastischen Koordinatenzuschläge

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + \mathbf{l} \quad (2-6)$$

mit \mathbf{L}^0 Vektor mit den Näherungswerten der Beobachtungen
 \mathbf{l} Vektor der verkürzter Beobachtungen

Die Vektoren \mathbf{l} mit den Elementen l_i und der $\hat{\mathbf{x}}$ mit den Werten \hat{x}_j können deshalb hier direkt aus Beobachtungen erstellt werden. Die Gleichung (2-2) ergibt sich dann zu:

$$\hat{l} = l_i + v_i = f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_u) = a_{i1}\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \dots + a_{iu}\hat{x}_u \quad (2-7)$$

oder in Matrizenschreibweise:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (2-8)$$

als Basis für alle Berechnungen zur Ableitung der gesuchten Parameter (Jäger, Müller et al. 2005; Niemeier 2008).

Stochastisches Modell

Neben den oben beschriebenen funktionalen Zusammenhängen zwischen den gemessenen und den gesuchten Größen sind in der Vermessung immer Angaben zu den Genauigkeiten der Beobachtungen erforderlich. Das Maß für die Genauigkeit ist im Allgemeinen die Standardabweichung σ_i der Beobachtung l_i . Damit kann auch das Verhältnis der Genauigkeiten einzelner Beobachtungen oder von Beobachtungsgruppen zueinander berücksichtigt werden. Außerdem findet eine mögliche Abhängigkeit der Beobachtungen untereinander Eingang in das stochastische Modell, die durch die Korrelationskoeffizienten ρ ausgedrückt werden können.

$$\Sigma_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

mit $\Sigma_{(n,n)}$ Varianz-Kovarianz-Matrix

Da häufig keine Angaben über die Abhängigkeiten zwischen den Beobachtungen gemacht werden können oder die Annahme gerechtfertigt ist, dass die Messungen unabhängig sind, nimmt die Kovarianzmatrix die Struktur einer Diagonalmatrix an.

Da nicht immer Angaben zu den absoluten Zahlen der Genauigkeiten der Beobachtungen gemacht werden können, Angaben über das Verhältnis der Genauigkeiten dagegen möglich sind, ist es oftmals von Vorteil, die Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 als Konstante abzuspalten.

$$\Sigma_{(n,n)} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{(n,n)} \quad (2-10)$$

Bei dieser Zerlegung drückt die so entstandene Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{(n,n)}$ die Relation der Messgenauigkeiten aus. Mitunter ist es zweckmäßig, für verschiedene Beobachtungs-

gruppen verschiedene $\sigma_{0,k}^2$ einzuführen und diese einzeln zu schätzen (vergleiche nachfolgenden Abschnitt).

Neben den Kofaktoren tritt im Vermessungswesen häufig der Begriff „Gewicht“ als Maß für den Einfluss einer Beobachtung auf. Die Gewichtsmatrix \mathbf{P} ist als Inverse der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{II} definiert (Niemeier 2008).

$$\mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{II})^{-1} = \sigma_0^2 \cdot (\boldsymbol{\Sigma}_{II})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Varianzkomponentenschätzung

Wie bereits oben erwähnt, können einzelne Varianzkomponenten geschätzt werden, wenn Gruppen unterschiedlicher Beobachtungen gemeinsam ausgewertet werden. Ursprünglich fand dies in der gemeinsamen Auswertung von Strecken- und Winkelmessungen Anwendung. Hierfür müssen die Beobachtungsgruppen unabhängig voneinander und die Gewichtsmatrizen \mathbf{P} oder die Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{II} innerhalb einer Gruppe bekannt sein (Koch 2004; Niemeier 2008). Anstelle einer globalen Größe für die Gewichtseinheit s_0 , wird für jede Beobachtungsgruppe k ein gesonderter Wert $s_{0,k}$ geschätzt. Die unterteilte Betrachtung selbständiger Beobachtungsgruppen ist allerdings nur sinnvoll, wenn das gesamte Messnetz hochredundant ist, um die zusätzlichen gesuchten Parameter signifikant schätzen zu können (Sieg und Hirsch 2000). Die Schätzung von Varianzkomponenten und gegebenenfalls Kovarianzkomponenten können zu einer Verbesserung der Ausgleichungsergebnisse führen (Welsch 1984). Genauere Beobachtungen erhalten so ein größeres Gewicht im Berechnungsalgorithmus, wodurch die Ergebnisse der Ausgleichung „verbessert“ werden.

Um jeder Beobachtungsgruppe k eine eigene Standardabweichung $\sigma_{0,k}$ zuzuordnen, wird im stochastischen Modell für jede Beobachtungsgruppe eine eigene Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{II,k}$ eingeführt. Da weder beim Nivellement noch bei den Radarmessungen die Kovarianzen in einen konstanten und einen streckenabhängigen Teil unterteilt werden müssen, kann auf die Anwendung eines adaptiven Modells verzichtet werden (Niemeier 2008; Sieg und Hirsch 2000). Da die beiden Beobachtungstypen durch ihre unterschiedlichen Charakteristika als voneinander unabhängig betrachtet werden können, ist die Einführung von Kovarianzkomponenten ebenfalls nicht notwendig. Damit können die Korrelations

koeffizienten gleich Null gesetzt werden und die Varianz-Kovarianzmatrix Σ_{II} im stochastischen Modell sich zu ergibt:

$$\Sigma_{II} = \sum_{i=1}^2 \Sigma_{II,k} = \begin{bmatrix} \Sigma_{II,Niv} & 0 \\ 0 & \Sigma_{II,Rad} \end{bmatrix} = \sigma_{0,Niv}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{II,Niv} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma_{0,Rad}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{II,Rad} \end{bmatrix}. \quad (2-12)$$

Die Submatrizen $\mathbf{Q}_{II,Niv}$ und $\mathbf{Q}_{II,Rad}$ sind Diagonalmatrizen (vergleiche Gleichung (2-6)), da die einzelnen Beobachtungen als voneinander unabhängig betrachtet werden können.

Die Berechnungen der Varianzkomponenten erfolgt iterativ. Dafür werden, wie in (Koch 2004) und (Niemeier 2008) beschrieben, die Korrekturkoeffizienten bestimmt und für die erste Berechnung Näherungswerte $\alpha_{0,Niv/Rad}^2$ und $\sigma_{0,Niv/Rad}^2$ angenommen. Damit ergibt sich die Gleichung (2-12) zu:

$$\Sigma_{II} = \sigma_{0,Niv}^2 \cdot \alpha_{0,Niv}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{II,Niv} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma_{0,Rad}^2 \cdot \alpha_{0,Rad}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{II,Rad} \end{bmatrix}. \quad (2-13)$$

Mit diesen Eingangswerten wird eine erste Ausgleichung durchgeführt. Die Varianzen für die einzelnen Beobachtungsgruppen lassen sich dann nach Gleichung (2-14) bestimmen.

$$s_{0,k}^2 = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k}{r_{ges,k}} \quad (2-14)$$

$$\text{mit } r_{ges,k} = \sum r_i \quad (2-15)$$

mit $r_{ges,k}$ Gesamtredundanz der Beobachtungsgruppe k
 r_i Redundanz einer einzelnen Beobachtung

Die Redundanz ist ein Maß für die Kontrollierbarkeit der Beobachtungen. Für das gesamte Netz entspricht sie der Differenz aus der Anzahl der Beobachtungen und der Unbekannten. Der Redundanzanteil einer einzelnen Beobachtung spiegelt die Geometrie des Netzes wider und gibt den Anteil einer Beobachtung an der Gesamtredundanz an (Förstner 1979; Niemeier 2008).

Der neue Korrekturfaktor $\alpha_{1,k}^2$ folgt daraus als Produkt seines Vorgängers $\alpha_{0,k}^2$ und der Varianzkomponente $s_{0,k}^2$.

$$\alpha_{1,k}^2 = \alpha_{0,k}^2 \cdot s_{0,k}^2 \quad (2-16)$$

Daraus ergibt sich ein verbessertes stochastisches Modell der Form:

$$\Sigma_{II,1} = \alpha_{1,Niv}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{II,Niv} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_{1,Rad}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{II,Rad} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

Dieses kann dann wiederum als Grundlage für eine neue Berechnung dienen. Diese Berechnungen müssen solange durchgeführt werden, bis für alle Beobachtungsgruppen die Varianzkomponente $s_{n,k}^2 = 1$ erreicht ist. Die Varianz der Beobachtungsgruppe leitet sich dann als Produkt der Varianzkomponenten der einzelnen Iterationsschritte ab.

Entgegen der oben beschriebenen Iteration wurde die Berechnung für die gemeinsame Ausgleichung von Nivellement und radarinterferometrischen Daten modifiziert. Die Gewichte für die nivellierten Höhenunterschiede wurden wie in der Vermessung üblich als Reziproke des Nivellementwegs festgelegt. Der Wert $s_{0,Niv}$ beschreibt damit die Standardabweichung für einen Kilometerdoppelnivellement. Um diesen Wert weiterhin nach der Auswertung zur Verfügung zu haben, wurde die Iteration so angepasst, dass die eingebrachten Gewichte für das Nivellement und die damit zusammenhängenden Kofaktoren nicht verändert werden. Es werden daher nur die Gewichte und Kofaktoren der Radarinterferometrie angepasst. Der dafür eingeführte Korrekturfaktor λ beschreibt das Verhältnis zwischen den geschätzten Varianzen des Nivellements und der Radarinterferometrie und wird nach folgender Formel berechnet:

$$\lambda = \frac{s_{0,Niv}^2}{s_{0,Rad}^2} \quad (2-18)$$

mit λ Korrekturfaktor der Gewichte der Radarmessung bezogen auf das Nivellement

Die neuen Gewichte der radarinterferometrischen Höhenänderungen ergeben sich durch Multiplikation der vorhandenen Gewichte mit λ . Die Varianzen der beiden Beobachtungsgruppen nähern sich dann nicht dem Wert „1“ an, sondern $s_{0,Rad}^2$ dem Wert von $s_{0,Niv}^2$.

$$\lambda_{Gesamt} = \prod_i \lambda_i \quad (2-19)$$

mit λ_{Gesamt} Gesamtkorrekturfaktor

Die Ergebnisse der Ausgleichung ändern sich dadurch nicht, da das Verhältnis der Gewichte der verschiedenen Beobachtungsgruppen in beiden Fällen identisch ist. Dabei verändert sich die Standardabweichung der Gewichtseinheit, während die Standardabweichungen der Beobachtungen und Unbekannten gleich bleiben.

Vermittelnde Ausgleichung

Da die tatsächlichen Beobachtungen l_i das funktionale Modell nicht erfüllen, werden diese zu ausgeglichenen Beobachtungen \hat{l}_i verbessert, dass die Gleichungen des funktionalen Modells erfüllt werden. Da diese Bedingungen für eine Bestimmung der gesuchten Parameter nicht ausreichend sind, müssen zusätzlich die Eigenschaften der Verbesserungen festgelegt werden. In der Ausgleichungsrechnung ist das meist verwendete Schätzprinzip die Methode der kleinsten Quadrate.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min \quad (2-20)$$

Sie wurde Anfang des 19. Jahrhunderts etwa zeitgleich vom Franzosen Adrien Marie Legendre und dem Deutschen Carl Friedrich Gauß entwickelt. Die Ergebnisse dieser Vorgehensweise sind in der Regel plausibel und durch klare, einfache Rechenwege nachvollziehbar (Carosio 2008; Navratil und Staudinger 2006).

Wird in die in (2-20) formulierte Zielfunktion das funktionale Modell aus Gleichung (2-8) eingesetzt, ergibt sich:

$$(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}) \rightarrow \min. \quad (2-21)$$

Um für diese Zielfunktion ein Minimum zu ermitteln, muss nach $\hat{\mathbf{x}}$ abgeleitet und dieser Ausdruck zu Null gesetzt werden.

$$\frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (2-22)$$

Dadurch ergibt sich:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}). \quad (2-23)$$

In Gleichung (2-23) werden die Produkte in den Klammern durch eigenständige Matrizen und Vektoren ersetzt.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \quad (2-24)$$

Die Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} ist symmetrisch und regulär, wenn die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} spaltenregulär ist.

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} \quad (2-25)$$

Ihre Inverse ist die Kofaktorenmatrix der Unbekannten \mathbf{Q}_{xx} . Diese Matrix ist für die Diskussion der Ergebnisse von besonderer Bedeutung. Aus ihren Daten können Angaben zur den Genauigkeiten und den Abhängigkeiten zwischen den Unbekannten abgeleitet werden. Nach der Bestimmung der Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$ und Umstellen der Formel (2-8) lassen

sich die Verbesserungen \mathbf{v} berechnen. Durch Addition von \mathbf{v} zu den tatsächlichen Beobachtungen \mathbf{l} ergeben sich die ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \quad (2-26)$$

Neben der Methode der kleinsten Quadrate gibt es zwei weitere Zielfunktionen für die Verbesserungen. Dies ist zum einen die „Minimale Summe der Absolutbeträge der Verbesserungen“. Diese von Boskovitsch und Laplace entwickelte Methode eignet sich besonders gut für das Erkennen grob fehlerhafter Messungen. Bei diesen Beobachtungen treten extrem große Verbesserungen auf, während die Verbesserungen der anderen Beobachtungen verhältnismäßig klein werden (Kampmann 1986). Zum anderen kann die „Minimale Maximalabweichung für Verbesserungen“ benutzt werden. Diese Methode bewirkt genau das Gegenteil zur „Minimalen Summe der Absolutbeträge der Verbesserungen“. Widersprüche zwischen den Beobachtungen werden möglichst weit verteilt. Eine sinnvolle Anwendung dieses Verfahrens ist beispielsweise das Einpassen eines neugemessenen Netzes in ein bereits bestehendes übergeordnetes. Die Klaffen an den identischen Punkten werden dabei minimal (Kampmann 1992).

Angaben zur Genauigkeit

Da alle Messungen streuen, ist es wichtig, Angaben über die Güte der Beobachtungen und Unbekannten treffen zu können. Diese zufälligen Abweichungen sind Ausgangspunkt der Ausgleichsrechnung. Sie sind vom Betrag und vom Vorzeichen unregelmäßig (Wolf 1994).

Ein Maß für die Qualität der Messungen ist die Standardabweichung der Gewichtseinheit a posteriori s_0 . Sie berechnet sich nach:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n - u}} \quad (2-27)$$

Mit diesem Wert können die Standardabweichungen der Beobachtungen und der Unbekannten abgeleitet werden. Die Standardabweichung der ursprünglichen Beobachtungen ergibt sich analog zu Gleichung (2-11) unter Verwendung von s_0 .

Die Standardabweichung der Unbekannten s_x berechnet sich nach:

$$s_{x_i} = s_0 \cdot \sqrt{q_{xx}} \quad (2-28)$$

Mit q_{xx} Elemente der Hauptdiagonalen der Matrix \mathbf{Q}_{xx}

Die Werte q_{xx} befinden sich auf der Hauptdiagonalen der Kofaktorenmatrix der Unbekannten \mathbf{Q}_{xx} . Zur Berechnung der Standardabweichung der ausgeglichenen Beobachtungen $s_{\hat{i}}$ muss vorab deren Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{\hat{ii}}$ berechnet werden.

$$\mathbf{Q}_{\hat{ii}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{xx} \cdot \mathbf{A}^T \quad (2-29)$$

Analog zu der vorherigen Berechnung ergibt sich:

$$s_{\hat{i}} = s_0 \cdot \sqrt{q_{\hat{ii}}} . \quad (2-30)$$

(Gruber und Joeckel 2011; Lothar und Strehle 2007).

Normierte Verbesserung

In der Ausgleichsrechnung besteht neben der Bestimmung der Unbekannten das Ziel, fehlerbehaftete Beobachtungen zu erkennen und aus der Gesamtheit der Beobachtungen herauszunehmen. Als ein guter Indikator für fehlerhafte Beobachtungen haben sich die Verbesserungen erwiesen. Sind die Beobachtungen normalverteilt, sind es die Verbesserungen ebenfalls. Werden die Verbesserungen durch ihre Standardabweichung dividiert, genügen diese Werte einer normierten Normalverteilung. Ihr Erwartungswert ist dabei 0, die Standardabweichung nimmt den Wert 1 an (Carosio 2008). Die so berechnete Größe wird als normierte Verbesserung NV bezeichnet und berechnet sich nach:

$$NV_i = \frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{q_{vv}}} . \quad (2-31)$$

Die Kofaktoren der Verbesserungen q_{vv} befinden sich auf der Hauptdiagonalen der \mathbf{Q}_{vv} -Matrix. Diese ergibt sich nach:

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{\hat{ii}} . \quad (2-32)$$

Der Test der normierten Verbesserungen auf Ausreißer wurde von (Baarda 1968) unter dem Begriff „Data Snooping“ erstmals vorgestellt. Bei diesem Vorgehen kann immer nur die Beobachtung mit der größten normierten Verbesserung überprüft werden, da eine fehlerhafte Beobachtung nicht nur die dazugehörige Verbesserung beeinflusst, sondern alle. Die Berechnungen erfolgen deshalb iterativ. Nach dem Erkennen eines groben Fehlers erfolgt eine neue Ausgleichung und eine erneute Überprüfung der normierten Verbesserungen (Lothar und Strehle 2007).

Eine fehlerbehaftete Beobachtung liegt genau dann vor, wenn die Testgröße NV größer ist als ein aus der normierten Normalverteilung abgeleiteter Grenzwert. Diese üblicherweise verwendeten Quantile sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 2.1: Quantile der Normalverteilung

Signifikanzniveau	Grenzwert
99%	2,5
99,9%	3,3
99,99%	4,0

Beobachtungen mit einer normierten Verbesserung $NV_i < 2,5$ sind nicht fehlerbehaftet. Beobachtungen mit Werten $NV_i > 4$ sind sehr wahrscheinlich fehlerhaft, bei Werten 3,3 und 4 sind grobe Fehler möglich (Fröhlich 2000; Lothar und Strehle 2007).

In Gleichung (2-31) kommt für die Berechnung der normierten Verbesserung die a priori Standardabweichung zum Einsatz. Wenn diese allerdings nicht bekannt ist, kann sie durch die nach Formel (2-27) a posteriori bestimmte Standardabweichung ersetzt werden. Die so bestimmten normierten Verbesserungen sind dann allerdings nicht mehr normalverteilt, sondern verhalten sich gemäß der studentschen t-Verteilung (Lehmann 2010; Pope 1976). Für diese Verteilung lassen sich analog zur Normalverteilung Quantile für ausgesuchte Signifikanzniveaus bestimmen. Diese sind bei der t-Verteilung allerdings zusätzlich vom Freiheitsgrad abhängig. Mit zunehmender Überbestimmung oder Redundanz nähert sich die t-Verteilung der Normalverteilung an. Ab einem Wert von $r = 40$ können beide Verteilungen als identisch angenommen werden, weshalb mit Grenzwerten aus Tabelle 2.1 gearbeitet werden kann (Mittag 2011; Mosler und Schmid 2006).

Sind die Beobachtungen zu stark fehlerbehaftet, versagt die beschriebene Methode der Fehlersuche. Dann können Ausgleichungen nach der Methode der „Minimierung der Absolutbeträge der Verbesserungen“ zum Einsatz kommen. Dabei sind die „Verschmierungseffekte“ zwischen den Verbesserungen nicht so stark, wodurch das Erkennen der fehlerbehafteten Beobachtungen erleichtert wird. Im Anschluss an diese Art der Fehlersuche und Elimination der fehlerhaften Beobachtungen ist allerdings eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchzuführen, da die Ergebnisse einer solchen Parameterschätzung nicht mit denen nach der Methode der kleinsten Quadrate übereinstimmen (Niemeier 2008).

2.2 Detektion von Rangdefekten

Für die Bestimmung der Kofaktorenmatrix der Unbekannten \mathbf{Q}_{xx} wird Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} invertiert. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Matrix regulär ist, also gilt $rg(\mathbf{N}) = u$. Ursachen für einen Rangdefekt der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} können zum einen fehlende Informationen über den Anschluss des auszugleichenden Netzes sein, zum anderen fehlende Beobachtungen zwischen einzelnen Netzteilen, so dass diese nicht zu einem Gesamtnetz zusammengefasst werden können (Höpcke 1980).

Um den ersten Fall (den Datumsdefekt) zu vermeiden, muss bei der Ausgleichung von Höhennetzen mindestens einem Punkt eine Höhe zugewiesen werden. Um den zweiten Fall (den Konfigurationsdefekt) auszuschließen, muss geprüft werden, ob sich die Beobachtungen zu einem Netz zusammenfügen lassen. Es wird geprüft, welche Punkte sich über die gegebenen Messungen mit dem Anschlusspunkt verbinden lassen. Die Punkte, für die dies nicht möglich ist, sollen erkannt, ihre zugehörigen Beobachtungen eliminiert und für mögliche spätere Auswertungen zusammengefasst werden.

Mit der Determinante der Normalgleichungsmatrix lässt sich feststellen, ob ein Konfigurationsdefekt in den Beobachtungen auftritt oder ob sich alle Messungen zu einer Datenreihe zusammenfügen lassen.

Gilt $\det(\mathbf{N}) \neq 0$, liegt kein Rangdefekt vor und die gegebenen Daten können unmittelbar ausgeglichen werden.

Gilt $\det(\mathbf{N}) = 0$, ist es notwendig, die (Zeit)Punkte herauszufinden, die sich nicht an den Nullpunkt anbinden lassen, um die dazugehörigen Beobachtungen aus der Berechnung nehmen zu können.

Dies kann über eine Breitensuche erfolgen. Mit dieser Methode aus der Graphentheorie können Graphen daraufhin untersucht werden, ob sie zusammenhängend sind. Als zusammenhängenden Graphen bezeichnet man jene, bei denen von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke über eine beliebige Folge von Kanten gelangt werden kann (Beutelspacher und Zschiegner 2007).

Bei der Breitensuche werden von einem Startknoten aus nacheinander alle Nachbarknoten besucht und von diesen wiederum die noch nicht aufgesuchten Nachbarknoten. Dies geschieht so lange, bis alle Knoten eines zusammenhängenden Graphen durchlaufen wurden. Alle nicht verwendeten Knoten können nicht über Kanten an den Startknoten angeschlossen werden (Vahrenkamp und Mattfeld 2007).

2.3 Untersuchungsgebiet

Das Untersuchungsgebiet liegt über einer Erdöl-/Erdgaslagerstätte im westlichen Emsland. Um die Lagerstätte effizienter auszubeuten, wurde die Injektionsrichtung des Wassers geändert. Die damit einhergehenden starken Druckveränderungen innerhalb der Lagerstätte, können zu Bewegungen an der Tagesoberfläche führen. Diese Höhenänderungen, die zeitlich verzögert und unterschiedlich stark an der Oberfläche auftreten, wurden mit unterschiedlichen Messmethoden bestimmt.

Dies war zum einen die Differentielle Radarinterferometrie (DInSAR), mit der unter idealen Bedingungen Höhenänderungen flächendeckend bestimmt werden können. Aus der Differenz der Phasenwerte zwischen zwei Aufnahmen wird für alle Kombinationen die Höhenänderung abgeleitet. Insgesamt standen 24 Radarszenen des Sensors ASAR des Satelliten Envisat zur Verfügung, so dass sich bis zu 276 Höhenänderungen bestimmt werden könnten. Die Aufnahmen erfolgen in einem Abstand von 35 Tagen, die Orbitnummern zwischen zwei aufeinanderfolgenden Aufnahmen unterscheiden sich um den Betrag von 501. Die verwendete Wellenlänge beträgt $\lambda_{\text{radar}} = 5,6\text{cm}$. Mit dieser Wellenlänge und einem Einfallswinkel von 20° können Höhenänderungen von bis zu 2,98 Zentimetern bestimmt werden, bevor es zu einem Phasensprung kommt [vergleiche (Hanssen 2001)].

Da dieses Gebiet sehr dünn besiedelt und stark landwirtschaftlich geprägt ist, war zu befürchten, dass eine Bestimmung der Bewegungen für das gesamte Gebiet nicht möglich sein wird. Deshalb wurden im Messgebiet zehn Corner-Reflektoren installiert, da diese über besonders gute Rückstreuungseigenschaften verfügen. Corner-Reflektoren bestehen aus drei senkrecht aufeinander stehenden Metallplatten. An ihnen wird die Strahlung so reflektiert, dass sie zu ihrem Ausgangspunkt zurück und jeder Strahl im Reflektor, den gleichen Weg zurücklegt. Die Reflektoren waren über Metallrohre bis zu sechs Meter tief im Untergrund gegründet. Ein Corner-Reflektor (Punkt 117 in Abbildung 2.4) wird dabei als Referenz für die anderen benutzt. Da das Messgebiet kleinräumig (1,3 km x 2,1 km) ist, wurde die Annahme getroffen, dass die atmosphärischen Bedingungen etwa konstant sind.

Um die Sensitivität des DInSAR-Verfahrens zu testen, wurden in einem Versuch sechs der zehn Corner-Reflektoren um einen Betrag um 9,5 Millimeter erhöht. Zur Validierung der Radarinterferometrie wurden zusätzlich in regelmäßigen Abständen Präzisionsnivellements durchgeführt. Diese Messungen fanden meist wenige Tage vor oder nach dem Satellitenüberflug statt. Die hierfür notwendigen Messpunkte werden anstelle der Corner-Reflektoren auf den tief gegründeten Stahlrohren angebracht. Das Nivellement wurde an einen Punkt des öffentlichen Vermessungsnetzes außerhalb des Untersuchungsgebietes angeschlossen (Punkt 0 in Abbildung 2.4). Weitere Informationen zu diesem Forschungsprojekt finden sich in (Schäfer, Busch et al. 2008; Schäfer, Schäfer et al. 2008a; Schäfer, Schäfer et al. 2008b).

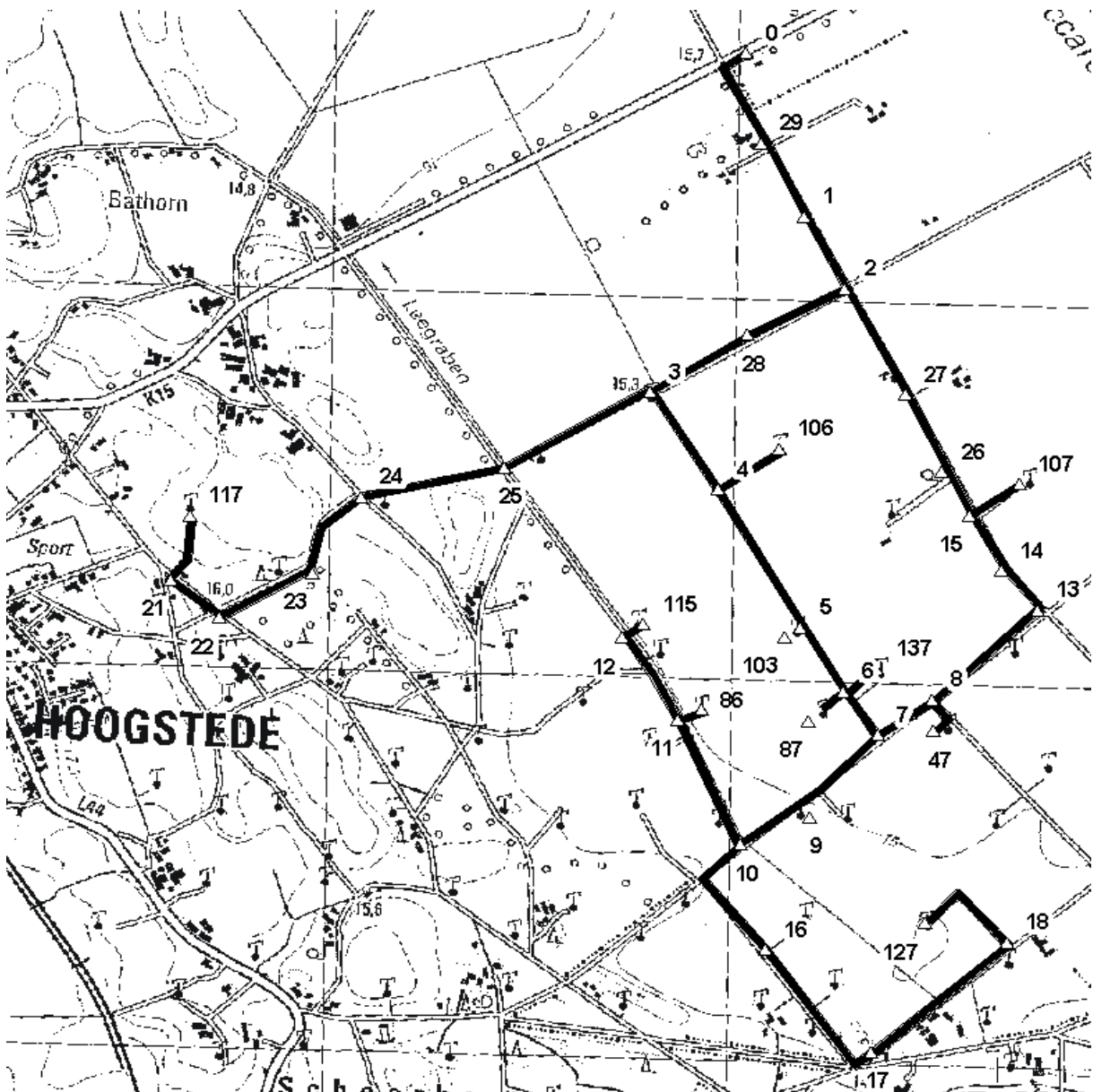


Abbildung 2.4: Lageplan der Nivellementpunkte (1 bis 29) und der Corner-Reflektoren (ab Nummer 47) mit dem Nivellementweg

2.4 Ausgleichung einzelner Zeitreihen der Radarinterferometrie

Die im vorherigen Kapitel vorgestellten Grundlagen der Berechnungen werden nacheinander auf die gemessenen Höhenänderungen und -unterschiede angewendet. Dabei werden die Messwerte zuerst auf Konfigurationsdefekte überprüft und anschließend ausgeglichen.

2.4.1 Suche nach unabhängigen Punkten

Mit der unter Kapitel 2.2 vorgestellten Suche nach unabhängigen Punkten werden diese aus der Gesamtheit aller Beobachtungen getrennt. Als Startpunkt der Breitensuche wird der erste

Punkt der Zeitreihe oder ein Anschlusspunkt der Nivellements gewählt. Von diesem Punkt aus werden alle Punkte ermittelt, die über die Beobachtungen erreicht werden können und nachfolgend ausgeglichen.

Die Beobachtungen, die Zeitpunkte enthalten, für die über die Breitensuche keine Verbindung zum Startpunkt festgestellt wurde, werden nach der Eliminierung, getrennt nach Beobachtungstypen zusammengefasst und gespeichert. Sie stehen somit für spätere Auswertungen zur Verfügung.

2.4.2 Ausgleichung der Höhenänderungen

Die vorliegenden Daten der Radarinterferometrie und des Nivellements weisen sowohl einzeln als auch zusammen betrachtet eine hohe Redundanz auf. Dies und die leichtere Automatisierbarkeit sprechen für eine vermittelnde Ausgleichung (Lothar und Strehle 2007).

Vor den eigentlichen Berechnungen werden die Daten für die Ausgleichung eingelesen. Dazu gehören die Punktnummer und die Datei in der die Höhenänderungen abgelegt sind. Aus diesen Daten werden die Zeitpunkte der Messung (Nummern des Orbit, der Radarszenen) und die Messwerte selbst, der Beobachtungsvektor \mathbf{I} , extrahiert. Ebenfalls leitet man die \mathbf{A} -Matrix ab. Das funktionale Modell in Gleichung (2-4) zeigt, dass die Unbekannten bereits linear vorliegen. Damit nehmen die Koeffizienten die Werte „1“ und „-1“ an. Aufgrund dieser Linearität kann auf die Einführung von Näherungskordinaten und damit auf eine Iteration verzichtet werden (Navratil und Staudinger 2006).

Um einen Datumsdefekt zu vermeiden, wird dem ersten Wert der Messung der Wert „0“ zugewiesen. Zusätzlich werden die Koeffizientenmatrix und der Beobachtungsvektor um je eine Zeile erweitert. Parallel dazu muss auch der Gewichtsvektor um einen Wert erweitert werden. Dem Anschlusspunkt wird der Mittelwert der Gewichte zugewiesen.

Definition der Gewichte

Wie im Abschnitt „Stochastisches Modell“ in Kapitel 2.1 aufgezeigt, können den Beobachtungen Gewichte zugewiesen werden, die das Verhältnis der Genauigkeiten der Beobachtungen untereinander beschreiben.

Berechnungen mit gleichgewichteten Beobachtungen für jeden einzelnen Corner-Reflektor haben gezeigt, dass zuerst Messungen mit sehr großen Basislinien herausgenommen werden (siehe Abbildung 2.5). Eine räumliche Basislinie beschreibt dabei den Abstand zweier Satellitenpositionen zu den Aufnahmezeitpunkten. Hierfür wurden die Ausgleichung und die Streichung der Beobachtung mit der größten normierten Verbesserung solange ausgeführt, bis nur noch u Beobachtungen zur Bestimmung der u Unbekannten in der Berechnung verblieben sind. In der folgenden Abbildung ist die Größe der räumlichen Basislinien gegen den Iterationsschritt einer derartigen Berechnung am Beispiel des Corner-Reflektors 115 aufgezeigt.

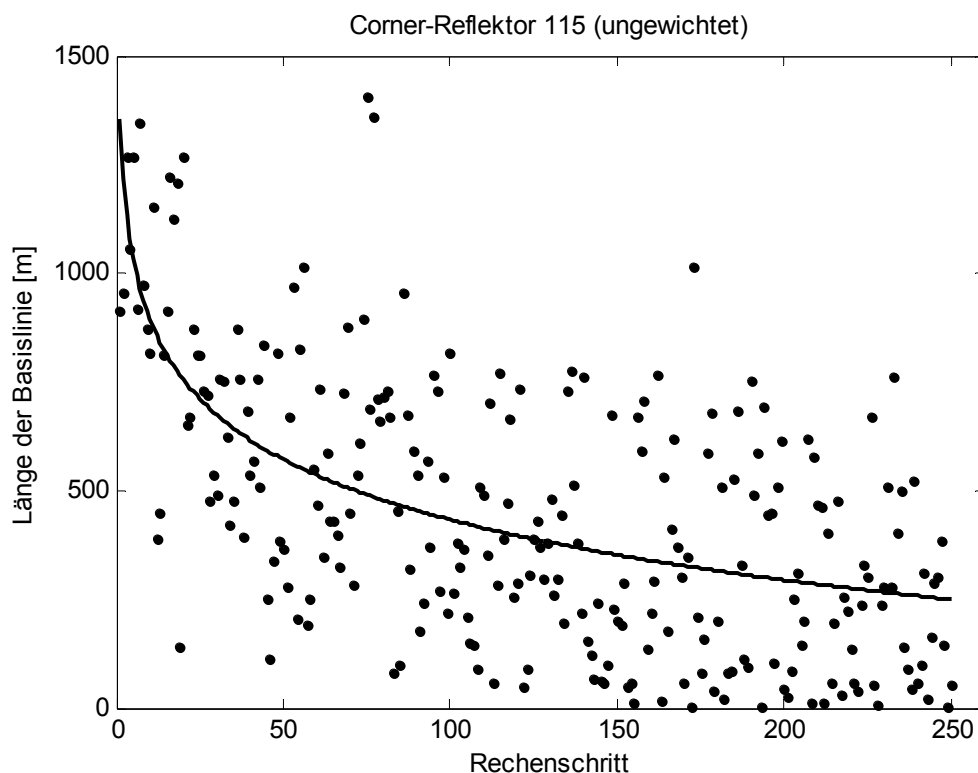


Abbildung 2.5: Länge der räumlichen Basislinie – ungewichtete Ausgleichung (Corner-Reflektor 115)

Daher ist es sinnvoll, Beobachtungen mit großen räumlichen Basislinien ein geringeres Gewicht zuzuweisen. Daher werden die Gewichte der radarinterferometrischen Beobachtungen als Reziproke der Größe der räumlichen Basislinie berechnet.

$$p_{rad} = \frac{1}{S_{basis}} \quad (2-33)$$

mit p_{rad} Gewicht der radarinterferometrischen Höhenänderung
 S_{basis} Größe der Basislinie [m]

So können diese in der Gesamtheit der Beobachtungen verbleiben, da sich die normierten Verbesserungen verkleinern. Neben einer Verkürzung der Rechenzeit kann so die Redundanz im Messnetz erhöht werden.

Analog zu der Ausgleichung mit den ungewichteten Beobachtungen wurde für jeden Corner-Reflektor eine Ausgleichung durchgeführt, bis lediglich u Beobachtungen verbleiben. Die Länge der Basislinien gegen den Iterationsschritt ist in Abbildung 2.6 dargestellt.

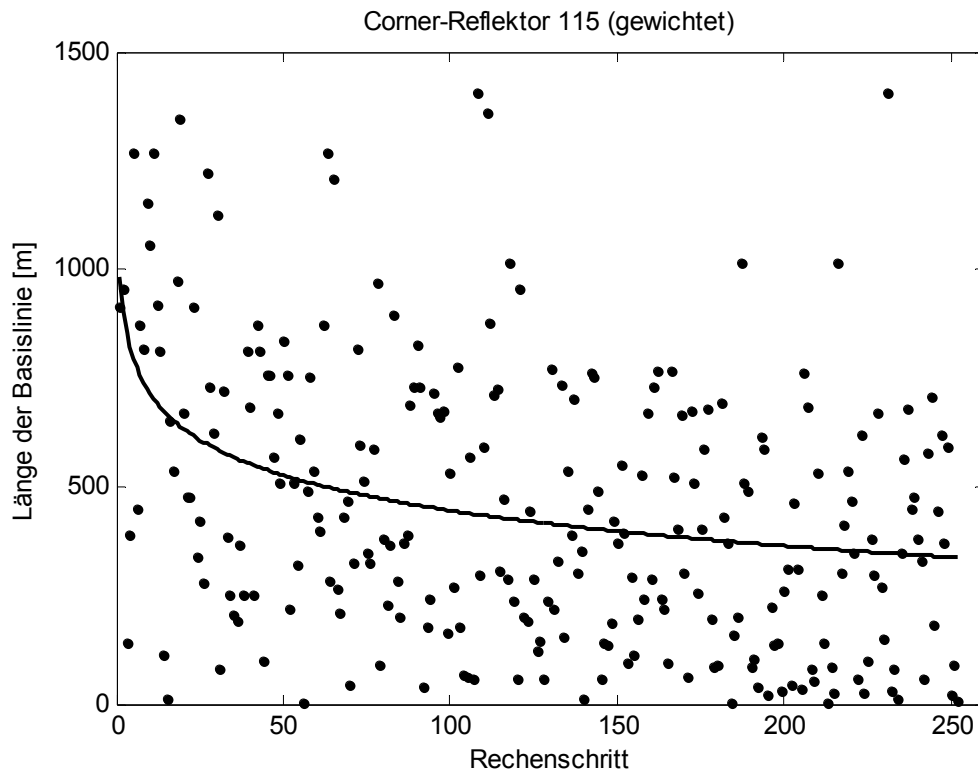


Abbildung 2.6: Länge der räumlichen Basislinie – gewichtete Ausgleichung (Corner-Reflektor 115)

Im Vergleich mit Abbildung 2.5 ist erkennbar, dass bei der Berechnung mit den gewichteten Beobachtungen nun ebenso solche als grob fehlerhaft herausfallen, die kleine Basislinien aufweisen.

Gegebenenfalls kann es sinnvoll sein, die Gewichte in Abhängigkeit von der Zeit einzuführen. Ein höheres Gewicht können dabei zeitlich benachbarte Höhenänderungen erhalten und/oder Messungen, die zur selben Jahreszeit gemacht worden.

Interferogramme mit großen räumlichen Basislinien

Die beiden vorherigen Abbildungen zeigen, dass für diese Berechnungen auch Beobachtungen berücksichtigt wurden, die große räumliche Basislinien aufweisen. Sie soll für ideale Auswertungen ganzer Bildpaare maximal einige hundert Meter betragen (Schäfer, Busch et al. 2008). Für die zu diesem Messgebiet veröffentlichten Auswertungen des Sensors ASAR des Satelliten Envisat wurde dabei eine maximale Basislinie von 800 Metern verwendet [vergleiche auch (Schäfer, Schäfer et al. 2008a; Schäfer, Schäfer et al. 2008b)].

Bei den hier betrachteten Auswertungen wurden allerdings alle möglichen differentiellen Phasenwerte an den Corner-Reflektoren verwendet, um zu prüfen, wie sich große Basislinien auf die Ergebnisse auswirken und um Konfigurationsdefekte zu vermeiden.

Das folgende Histogramm zeigt die Anzahl der Beobachtungen vor und nach der Ausgleichsrechnung. Ab einer Länge von 800 Metern nimmt der prozentuale Anteil an Beobachtungen, die in der Ausgleichung bleiben, stark ab (Abbildung 2.7).

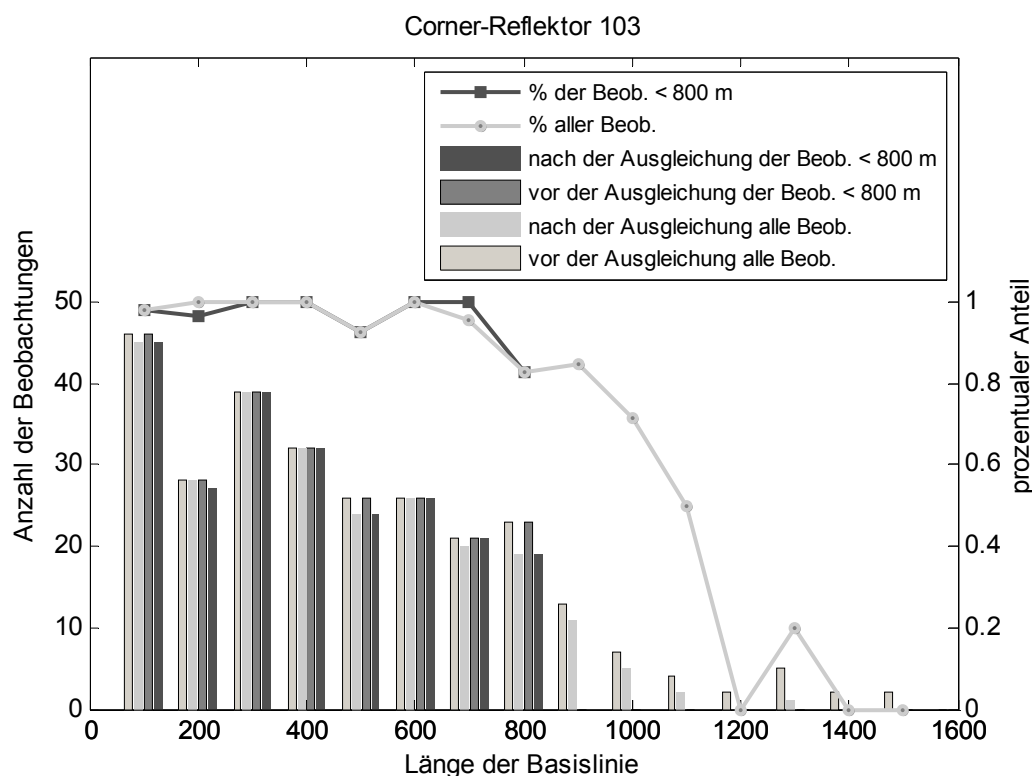


Abbildung 2.7: Anzahl der Beobachtungen nach der Größe der Basislinien (Corner-Reflektor 103)

Für das Ergebnis der Ausgleichung ist es nicht relevant, ob die Beobachtungen mit einer Basislinie von mehr als 800 Metern in der Ausgleichung verbleiben oder ob sie im Voraus aussortiert werden. Die Unterschiede der Ausgleichungsergebnisse liegen im untersuchten Beispiel (Corner-Reflektor Nr. 103) unter 0,5 mm und sind somit vernachlässigbar. Das liegt daran, dass diese Beobachtungen durch ihr vergleichsweise kleines Gewicht nur einen geringen Einfluss auf das Ergebnis haben (Abbildung 2.8).

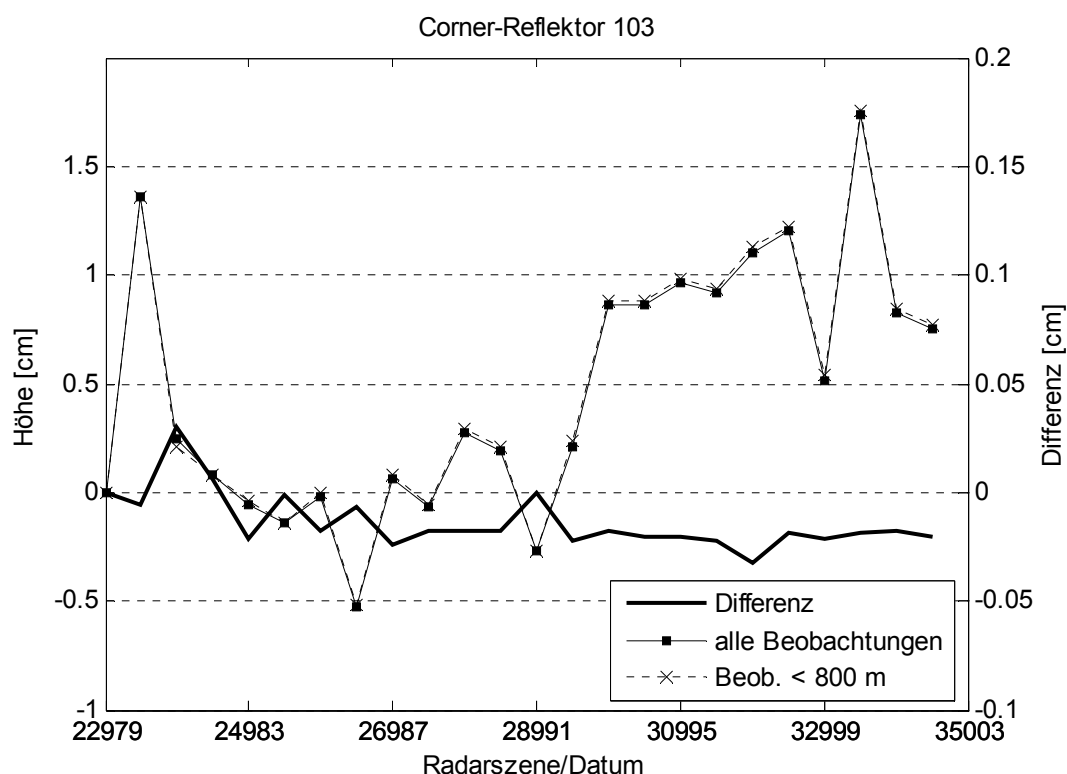


Abbildung 2.8: Ausgeglichene Höhen bei Verwendung aller Beobachtungen und der Beobachtungen mit einer Basislinie kürzer 800 Meter (Corner-Reflektor 103)

Wenn diese Beobachtungen in der Ausgleichung verbleiben, können sie dazu dienen durchgehende Zeitreihen herzustellen. Damit werden Konfigurationsdefekte vermieden und die Normalmatrix \mathbf{N} ist regulär. Widersprechen die Höhenänderungen mit großen räumlichen Basislinien den anderen gemessenen Werten, werden sie als grobe Fehler erkannt und eliminiert.

Detektion grob fehlerhafter Messungen

Gemessene Höhenänderungen, die bei der Ausgleichung normierte Verbesserungen größer als einen festgelegten Kennwert (vergleiche Tabelle 2.1) aufweisen, werden aus der Berechnung herausgenommen. Dabei wird immer nur die Beobachtung mit der größten normierten Verbesserung aus der Berechnung herausgenommen, da sich ein grober Fehler in der Ausgleichung immer auf mehrere Verbesserungen auswirkt (Lothar und Strehle 2007).

Die Messungen mit einem möglichen groben Fehler werden sortiert nach der Größe der normierten Verbesserungen ausgegeben. So kann festgestellt werden, ob es Höhenänderungen gibt, deren Verbesserungen im Bereich des Phasensprunges oder oberhalb davon liegen. Damit kann entschieden werden, ob bei Verbesserungen dieser Größenordnung die Eingangsdaten noch einmal überarbeitet werden müssen oder ob es andere Fehler gibt und die Beobachtungen herausgenommen werden.

Durch die Anzahl, der in der Ausgleichung verbliebenen Beobachtungen, ist es nicht möglich, die Zeitpunkte festzustellen, die durch Atmosphäre oder andere Störungen beeinflusst sind. Im Folgenden wird dies am Beispiel des Corner-Reflektors 86 gezeigt.

In Abbildung 2.9 sind die ausgeglichenen Höhen des Corner-Reflektors 86 dargestellt. Das Diagramm zeigt daneben die Anzahl der Beobachtungen, die nach der Ausgleichung im Netz verblieben sind. Wie auch in Abbildung 2.10 zu erkennen, sind zu den Zeitpunkten der Radarszenen 23480 und 27989 (↓) mit hoher Wahrscheinlichkeit äußere Einflüsse aufgetreten, die die Höhenmessung verfälscht haben. Diese sind allerdings nicht beim Aufdecken der groben Fehler aufgefallen. Die Anzahl der Beobachtungen ist in beiden Fällen nicht nennenswert kleiner geworden. Die auftretenden Störungen sind in den gemessenen Höhenänderungen etwa gleich groß, da der Einfluss der Atmosphäre in allen bestimmten Differenzen enthalten ist. Daher sind sie auch in den ausgeglichenen Höhen erkennbar.

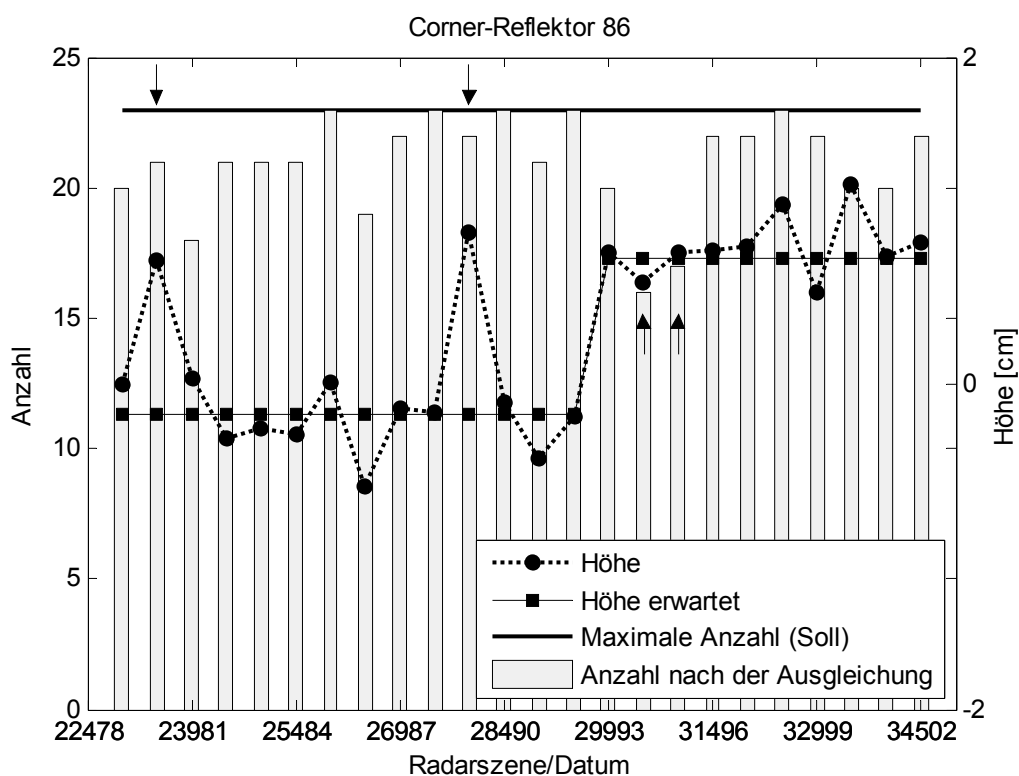


Abbildung 2.9: Anzahl der Beobachtungen je Zeitpunkt nach der Ausgleichung (Corner-Reflektor 86)

Dagegen sind die Szenen 30494 und 30995 (↑), die von atmosphärischen Störungen wohl nicht beeinflusst sind, häufiger als grobe Fehler aufgefallen und somit mit einer geringeren Anzahl an Höhendifferenzen in der Auswertung enthalten. Ähnliche Ergebnisse konnten bei den anderen betrachteten Corner-Reflektoren festgestellt werden.

Daher besteht bei der Auswertung der Radardaten die Aufgabe, die Szenen mit atmosphärischen Störungen vor oder durch die Ausgleichung für die weiteren Betrachtungen auszuschließen.

2.4.3 Ausgabe der Ergebnisse

Die Ergebnisse der Ausgleichung werden in Dateien abgelegt. Die Unbekannten und die Beobachtungen werden zusammen mit ihren Genauigkeiten gespeichert.

Eine graphische Ausgabe der Ergebnisse ist ebenfalls vorgesehen, was für einzelne Zeitreihen durchaus sinnvoll ist, da Ausreißer durch atmosphärische Störungen in diesen Graphen deutlich erkennbar sind. Die nachfolgende Abbildung zeigt beispielhaft die ausgeglichenen Höhen des Corner-Reflektors 47. Die Ausreißer (linke Graphik) finden sich in den Radarszenen 23480, 27989 und 30494.

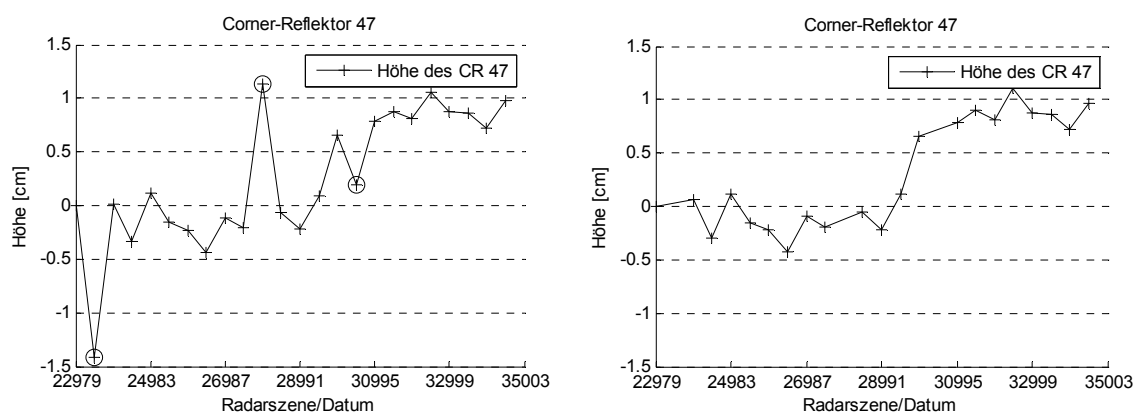


Abbildung 2.10: Ausgeglichenen Höhen des Corner-Reflektors 47 (links - mit Ausreißern; rechts – ohne Ausreißer)

Daher erfolgt nach einer Ausgleichung die Abfrage, ob alle Beobachtungen eines Zeitpunktes aus der Auswertung genommen werden sollen. Die Berechnung beginnt in diesem Fall neu. Dafür werden die entsprechenden Beobachtungen aus der Gesamtheit aller eliminiert. Die übrigen Beobachtungen werden ausgeglichen und die Ergebnisse gespeichert. Nach mehrmaligem Durchlaufen dieser Prozedur ergeben die ausgeglichenen Höhen den Verlauf rechts in Abbildung 2.10.

2.5 Gemeinsame Ausgleichung von nivellierten Höhenunterschieden und radarinterferometrisch bestimmten Höhenänderungen

Für die Berechnungen sind die Gewichte der nivellierten Höhenunterschiede umgekehrt proportional zur Länge des nivellierten Weges festgelegt worden (Baumann 1994; Kahmen 1997).

$$p_{niv} = \frac{1}{S_{niv[km]}} \quad (2-34)$$

mit p_{niv} Gewicht des nivellierten Höhenunterschieds
 $S_{niv[km]}$ Länge der Nivellementstrecke [km]

Die im Abschnitt „Varianzkomponentenschätzung“ des Kapitel 2.1 beschriebenen Berechnungen ergaben bei einer ersten Varianzkomponentenschätzung, dass die Gewichte für die Radardaten zu niedrig angesetzt waren. Die Gewichte der verwendeten Beispieldaten liegen beim Nivellement etwa zwischen 1 und 100, bei der Radarinterferometrie zwischen $7 \cdot 10^{-4}$ und 1,2. Der Korrekturfaktor bei der Berücksichtigung aller Beobachtungen hat die Größe $\lambda_{Gesamt} = 255$. Die Gewichte der Radarbeobachtungen beim untersuchten Beispiel liegen nach der Varianzkomponentenschätzung zwischen 0,18 und 320. Diese neuen Gewichte ergeben sich ebenfalls, wenn die Berechnungen mit größeren oder mit kleineren Gewichten gestartet werden. In Abbildung 2.11 sind die Verbesserungen der als grobe Fehler erkannten Beobachtungen dargestellt, wenn man die ursprünglich festgelegten Gewichte beibehält. Sie sind getrennt nach Nivellement und Radarinterferometrie abgebildet. Der Graph zeigt, dass nach über 120 Rechendurchläufen erstmals ein Radarhöhenänderung als grober Fehler erkannt und eliminiert wird. Dies ist durch die Charakteristik der beiden Beobachtungsgruppen nicht gerechtfertigt. Da die Radardaten durch atmosphärische Einflüsse rauschen können, ist den nivellierten Höhenunterschieden mehr zu vertrauen.

Mit der Erhöhung der Gewichte der interferometrisch gemessenen Höhenänderungen verschieben sich die herausgenommen Beobachtungen beider Gruppen zueinander (Abbildung 2.12).

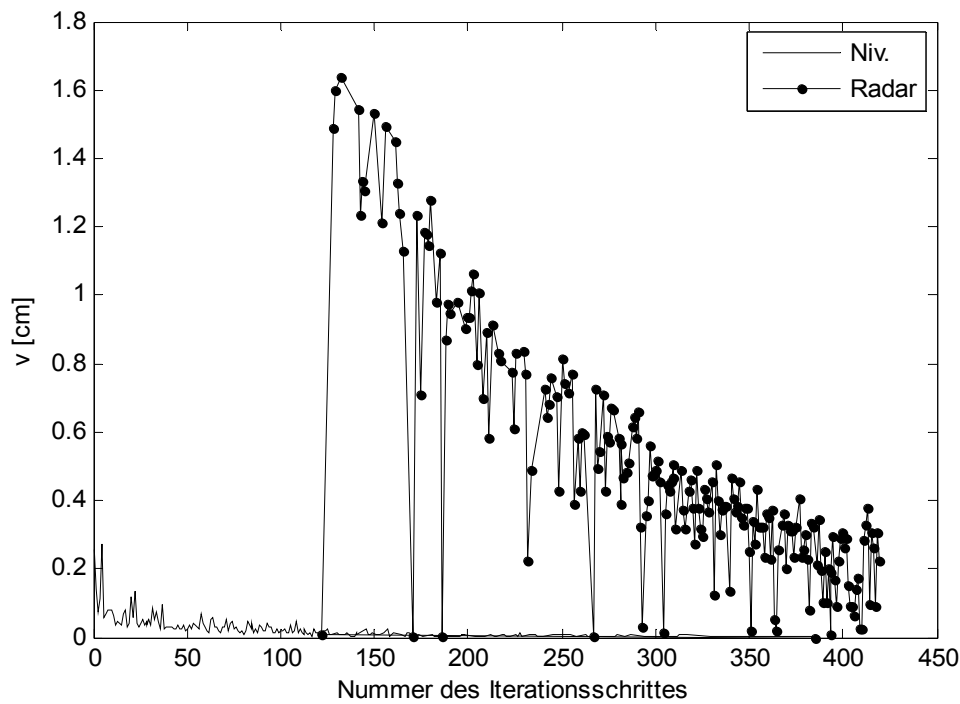


Abbildung 2.11: Größe der Verbesserung der als grober Fehler eingestuften Beobachtungen bezüglich des jeweiligen Berechnungsdurchlaufes bei Verwendung aller Daten mit den ursprünglichen Gewichten ($NV = 2,5$)

Die Radardaten werden nun eher als grobe Fehler erkannt und entfernt. Begründen lässt sich dieses Verhalten mit der Formel der normierten Verbesserung NV . Wie bereits beschrieben, berechnet sich die normierte Verbesserung NV nach:

$$NV_i = \frac{|v_i|}{s_0 \cdot \sqrt{q_{v_i v_i}}} . \quad (2-31)$$

Die Redundanz r_{ges} ergibt sich neben der Summation der einzelnen Redundanzanteile der Beobachtungen ebenso als Spur des Matrizenproduktes \mathbf{PQ}_{vv} .

$$r_{ges} = spur(\mathbf{P}_k \mathbf{Q}_{vv}) \quad (2-35)$$

Die Redundanz einer einzelnen Beobachtung ist dann das Produkt aus dem Gewicht der Beobachtung und dem Kofaktor der zugehörigen Verbesserung.

$$r_i = p_i q_{v_i v_i} \quad (2-36)$$

Aufgelöst nach $q_{v_i v_i}$

$$\sqrt{q_{v_i v_i}} = \frac{\sqrt{r_i}}{\sqrt{p_i}} \quad (2-37)$$

und in Gleichung (2-31) eingesetzt ergibt:

$$NV_i = \frac{|v_i| \cdot \sqrt{p_i}}{s_0 \cdot \sqrt{r_i}}. \quad (2-38)$$

Die normierten Verbesserungen NV sind somit proportional zur Wurzel der Gewichte der Beobachtungen.

Da die Gewichte der Radardaten nach der Varianzkomponentenschätzung erhöht worden sind und sich damit die Gewichte des Nivellements relativ dazu verringert haben, wird deren normierte Verbesserung ebenfalls kleiner und die Beobachtungen verbleiben in der Berechnung. Mit Formel (2-38), lässt sich ebenfalls erklären, dass Beobachtungen der Radarinterferometrie mit kleiner Verbesserung als grobe Fehler eingestuft werden. Bei diesen Beobachtungen liegen überdurchschnittlich große Gewichte vor, die die normierte Verbesserung groß werden lassen.

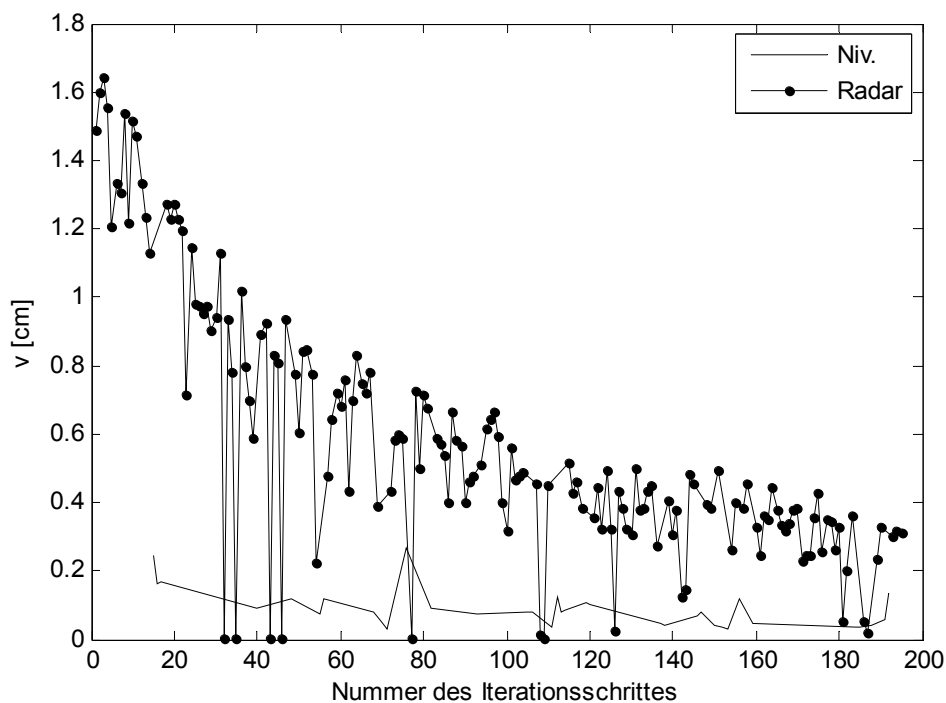


Abbildung 2.12: Größe der Verbesserung der als grober Fehler eingestuften Beobachtungen bezüglich des jeweiligen Berechnungsdurchlaufes bei Verwendung aller Daten nach der ersten Varianzkomponentenschätzung ($\lambda_{\text{Gesamt}} = 255$ und $NV = 2,5$)

Eine einmalige Schätzung der Varianzkomponenten ist jedoch nicht ausreichend. Nach dem Erkennen und Eliminieren grob fehlerhafter Beobachtungen muss mit den verbliebenen Beobachtungen eine neue Schätzung durchgeführt werden. Dies ist notwendig, da das Herausnehmen von Beobachtungen überwiegend einer Beobachtungsgruppe Veränderungen der Varianzen verursacht. Die aus der Schätzung der Varianzkomponenten neu bestimmten Faktoren für die Gewichte werden an alle Beobachtungen angebracht und neu ausgeglichen. Diese Vorgehensweise ist notwendig, da Beobachtungen, die als grobe Fehler herausgenommen wurden, nach der Regewichtung dieser durchaus beibehalten werden können.

Um einen Vergleich durchführen zu können wurden, Berechnungen für gewichtete und für ungewichtete Beobachtungen durchgeführt.

2.5.1 Iterative Varianzkomponentenschätzung mit gewichteten Beobachtungen

Die folgenden Ergebnisse beziehen sich wie die zuvor vorgestellten Ergebnisse auf Berechnungen mit einer normierten Verbesserung von $NV = 2,5$. Die Betrachtungen treffen ebenso für normierte Verbesserungen $NV = 3,3$ und $NV = 4,0$ zu. Ein Hauptunterschied besteht darin, dass mit den höheren Werten für NV weniger Beobachtungen als grobe Fehler detektiert und dadurch weniger herausgenommen werden. So waren beim untersuchten Beispiel mit $NV = 4,0$ nur 4 Iterationsschritte zur Varianzkomponentenschätzung nötig. Dabei wurden im letzten Schritt von den ursprünglich fast 2200 Beobachtungen nur noch 48 eliminiert. Mit kleineren Werten für NV werden mehr Beobachtungen verworfen, was in jedem einzelnen Schritt zu mehr Berechnungen führt. Die sich stärker verändernde Anzahl der einzelnen Beobachtungen führt dann bei der Varianzkomponentenschätzung zu mehr Berechnungsdurchläufen. Bei der Berücksichtigung aller Beobachtungen im Untersuchungsgebiet und $NV = 2,5$ waren 8 Durchläufe zur Varianzkomponentenschätzung notwendig, bis das Abbruchkriterium erreicht ist. Dabei wurden im letzten Iterationsschritt rund 200 Beobachtungen entfernt. Dies ist geringfügig mehr als bei der Ausgleichung nach der ersten Varianzkomponentenschätzung. Die Anzahl der beibehaltenen nivellierten Höhenunterschiede nimmt dabei zu, die Anzahl radarinterferometrisch gemessener dagegen ab.

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen den Verlauf ausgewählter Parameter während der Durchläufe der abwechselnd durchgeführten Varianzkomponentenschätzung und Ausgleichungsrechnung.

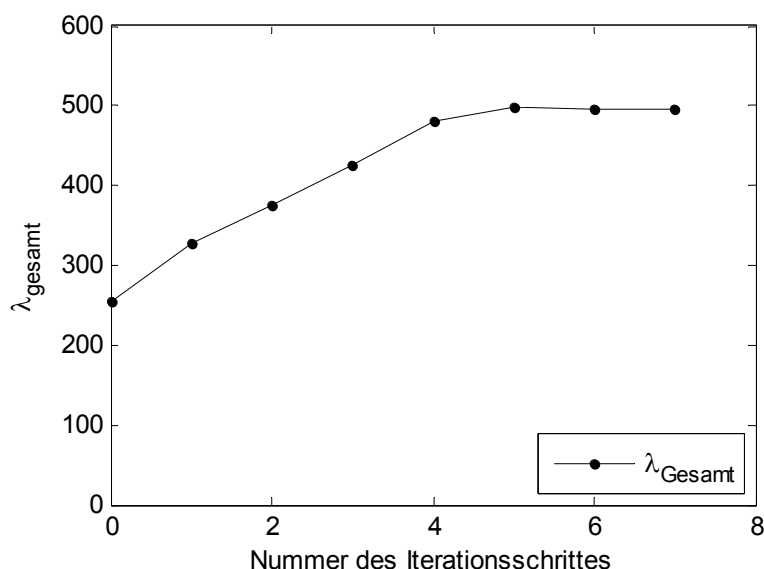


Abbildung 2.13:
Korrekturfaktor
 λ_{Gesamt} im Verlauf
der Iteration

Bei einer normierten Verbesserungen $NV = 2,5$ nimmt λ_{Gesamt} am Ende der Berechnung einen Wert von 497 an. Werden die Kennwerte und Eingangsdaten leicht verändert, bleibt die Größenordnung der neuen Gewichte erhalten. Wird ein größerer Wert für NV gewählt, sinkt der Faktor λ_{Gesamt} beim untersuchten Beispiel um etwa 20%, werden die Beobachtungen der Radarinterferometrie mit einer Basislinie größer 800 m in der Auswertung nicht berücksichtigt, wird λ_{Gesamt} um etwa 20% größer. Die Unterschiede sind dadurch erklärbar, dass bei einer größeren normierten Verbesserung mehr Beobachtungen beider Messgruppen in der Ausgleichung verbleiben. Da schon in den Ausgangsdaten überwiegend radarinterferometrisch bestimmte Höhenänderungen enthalten sind, verbleiben mehr dieser Messwerte in der Berechnung und erhalten ein geringeres Gewicht. Bei den Berechnungen ohne die interferometrischen Beobachtungen mit einer räumlichen Basislinie größer 800 m bleiben in der Iteration am Ende dieselben nivellierten Höhenunterschiede in der Auswertung, während jedoch weniger Radarbeobachtungen enthalten sind. Diese erhalten durch die Varianzkomponentenschätzung ein höheres Gewicht.

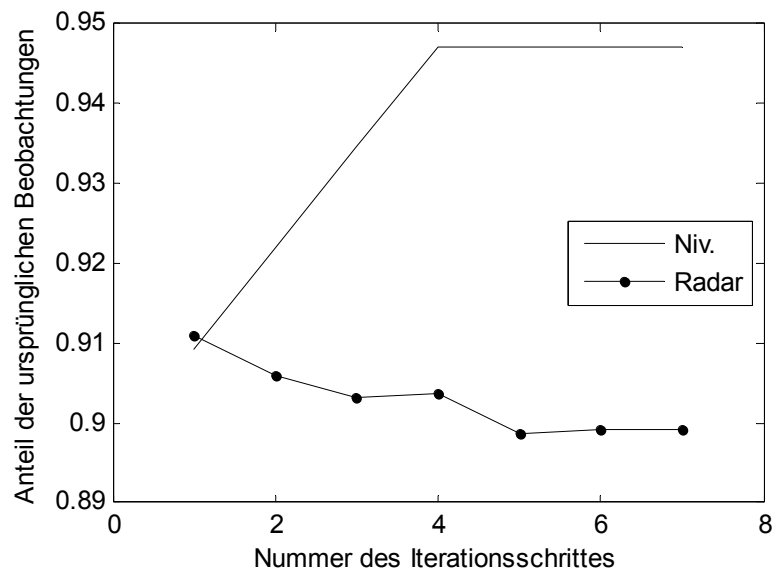


Abbildung 2.14:
Anteil, der in der
Berechnung
verbleibenden
Beobachtungen

Im Verlauf der iterativen Berechnungen verändert sich ebenso die Anzahl der Beobachtungen. Die Anzahl der nivellierten Höhenunterschiede nimmt in der Berechnung zu, die der radarinterferometrisch bestimmten nimmt ab (siehe Abbildung 2.14). Die Abbildung zeigt, dass bei der ersten Ausgleichung prozentual ein größerer Anteil an nivellierten als an interferometrisch bestimmten Höhenunterschieden eliminiert wird und sich dieses Verhältnis im Laufe der Berechnung umkehrt. Dieses Verhalten entspricht den Erwartungen, da den Werten des Nivellements höheres Vertrauen entgegengebracht wird. Die Gesamtzahl der Beobachtungen nimmt beim untersuchten Beispiel im Verlauf der Berechnungen leicht ab.

In der nachfolgenden Graphik ist die Zunahme der Gewichtseinheit s_0 dargestellt. Diese ist im Grunde nur auf die Zunahme der Gewichte in den Radarbeobachtungen zurückzuführen. Die Summe der Produkte vv bleibt in der Berechnung weitestgehend konstant, nimmt sogar eher leicht ab, da die Radarbeobachtungen mit den größeren Verbesserungen eher als grobe Fehler herausfallen. Die geringfügige Abnahme der Anzahl der Beobachtungen wirkt sich nicht aus.

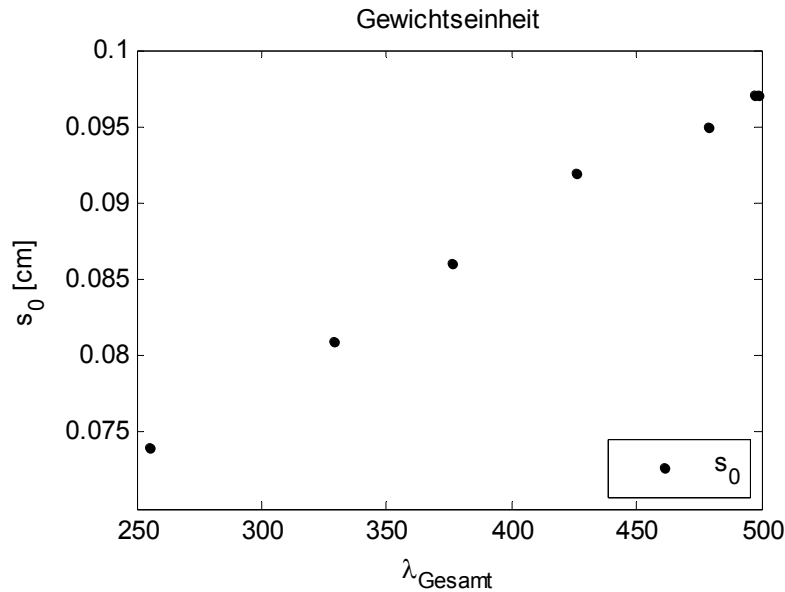


Abbildung 2.15:
Standard-
abweichung einer
Beobachtung mit
dem Gewicht $p_0 = 1$

In Abbildung 2.16 sind analog zu den ersten beiden Abbildungen 2.11 und 2.12 dieses Kapitels die Verbesserungen, der als grobe Fehler erkannten Beobachtungen dargestellt, wenn die Gewichte der Radarbeobachtungen mit dem Faktor $\lambda_{\text{Gesamt}} = 497$ vergrößert werden. Im Vergleich mit Abbildung 2.12 zeigt sich noch einmal, dass weniger nivellierte Höhenunterschiede verworfen werden. Werden bei $\lambda_{\text{Gesamt}} = 255$ die ersten Messungen dieser Beobachtungsgruppe im 15. Rechenschritt als grobe Fehler eingestuft, geschieht dies bei $\lambda_{\text{Gesamt}} = 497$ erst bei der 31. Berechnung. Daneben fallen ein Drittel weniger Beobachtungen des Nivellements heraus. Das größere Vertrauen in die Nivellementsdaten ist durch diese Berechnungen bestätigt. Der Vergleich dieser beiden Abbildungen zeigt ferner, dass gerade zu Beginn einer Ausgleichung unabhängig von den Werten von λ_{Gesamt} dieselben Beobachtungen der Radarinterferometrie als grobe Fehler eingestuft werden.

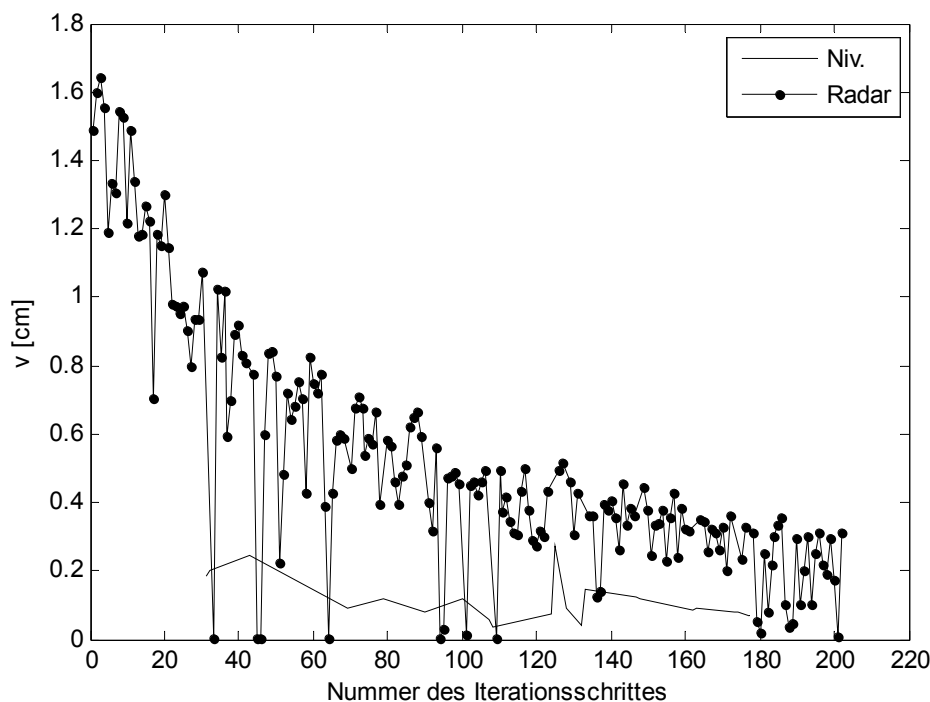


Abbildung 2.16: Größe der Verbesserung der als grobe Fehler eingestuften Beobachtungen bezüglich des jeweiligen Berechnungsdurchlaufes bei Verwendung aller Daten nach der Varianzkomponentenschätzung ($\lambda_{\text{Gesamt}} = 497$ und $NV = 2,5$)

Verbesserungen der Beobachtungen

In der nachfolgenden Abbildung 2.17 sind die größten, kleinsten und mittleren Verbesserungen der Beobachtungen in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} aufgezeigt. In der Abbildung wird zudem nach der Beobachtungsart unterschieden. Die Abbildung zeigt deutlich, dass die Verbesserungen der nivellierten Höhenunterschiede im Maximum und im Durchschnitt erheblich kleiner sind als die der interferometrisch bestimmten (Abbildung 2.17 b und c). Die Verbesserungen beim Nivellement senken den Mittelwert der Verbesserungen aller Beobachtungen gegenüber dem Mittelwert der Radarbeobachtungen (Abbildung 2.17 a und c). Dass diese Verbesserungen klein sind, ist in den Messungen vor Ort begründet. Weichen die Höhenunterschiede zwischen Hin- und Rückweg des Nivellements zu stark voneinander ab, wurden die Messungen wiederholt. Durch diese Mehrfachmessung fällt der dann nicht passende Höhenunterschied als grober Fehler auf. Im Graph (b) ist ebenfalls zu erkennen, dass die Verbesserungen mit steigendem λ_{Gesamt} zunehmen. Dies ist darin begründet, dass wie in Abbildung 2.14 zu erkennen, mehr Beobachtungen des Nivellements im Laufe der Iteration in der Ausgleichung verbleiben.

Die Verbesserungen der Größe 0 cm treten beim Nivellement immer dann auf, wenn beim Hin- und Rückweg der gleiche Höhenunterschied gemessen wird. Analog treten bei den Radardaten ebenfalls Beobachtungen auf, die keiner Verbesserung bedürfen.

Die Graphen zeigen, dass sich die Größe der Verbesserungen bei den Radarbeobachtungen im Laufe der Iteration nicht nennenswert verändern. Dabei handelt es sich um eine Beobachtung, die in jedem Beobachtungsschritt die größte Verbesserung aufweist, wobei diese im Absolutwert leicht variiert.

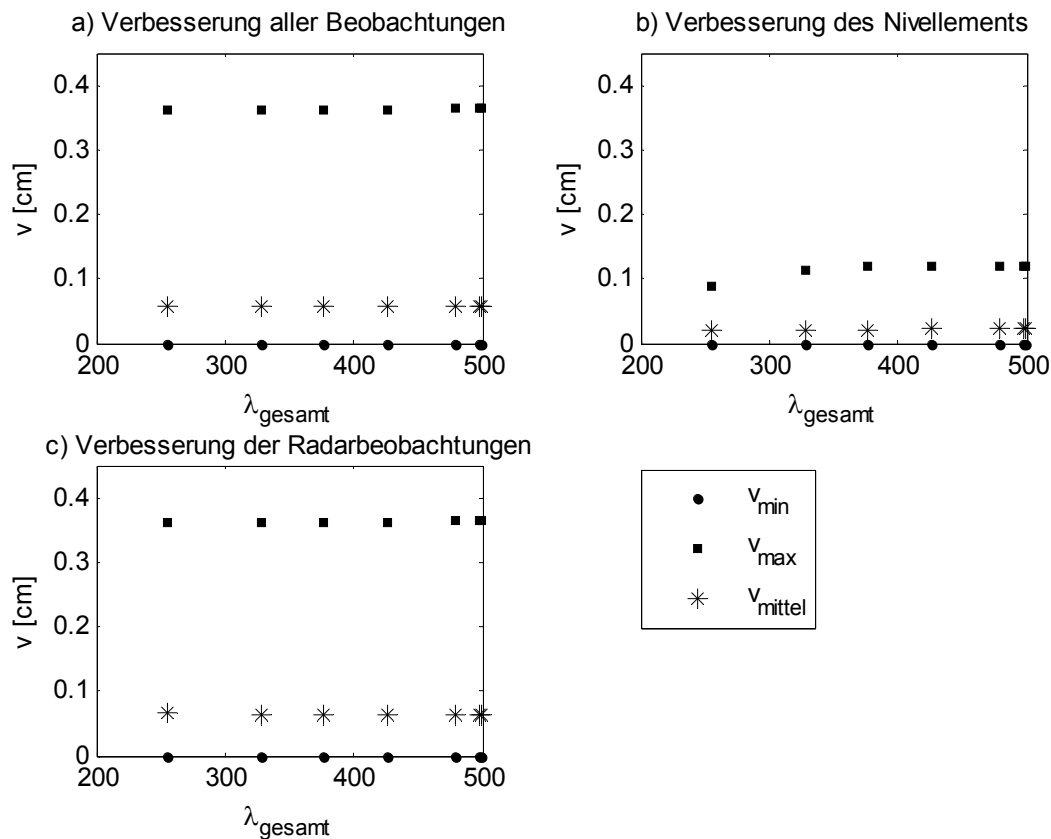


Abbildung 2.17: Maximale, minimale und durchschnittliche Verbesserungen in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]

In diesem untersuchten Beispiel ist ein Vergleich der Verbesserungen sinnvoll. Es kann jedoch vorkommen, dass im Verlauf der Iteration, die Beobachtungen mit den maximalen Verbesserungen des einen Rechenschritts im Folgenden nicht mehr enthalten sind, dafür andere Beobachtungen die maximale Verbesserung aufweisen, die in der vorherigen Ausgleichung nicht enthalten waren. Ein Vergleich ist dann nicht mehr zweckmäßig.

a priori Standardabweichungen der Beobachtungen

Analog zur vorherigen Abbildung werden in Abbildung 2.18 die a priori Standardabweichungen verglichen. Die Standardabweichung des Nivellements steigt mit der Zunahme von λ_{Gesamt} . Wie aus Gleichung (2-11) hervorgeht, berechnet sich die Standardabweichung der ursprünglichen Beobachtungen nach:

$$s_{l_i} = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}. \quad (2-39)$$

Wie in Abbildung 2.15 gezeigt, wächst s_0 mit steigendem λ_{Gesamt} . Da die Gewichte des Nivellements durch diese Vorgehensweise in der Berechnung konstant gehalten werden, lässt sich die Zunahme der dargestellten Standardabweichung nach der obigen Gleichung in Abbildung 2.18 (b) erklären. Dieses Verhalten zeigt sich in allen drei dargestellten Kurven, da dieselben Beobachtungen in den einzelnen Berechnungsschritten die maximalen und minimalen Standardabweichungen aufweisen und diese nicht verschiedenen Beobachtungen mit unterschiedlichen Gewichten zugeordnet sind. Die größte Standardabweichung ist dabei dem nivellierten Höhenunterschied mit dem kleinsten Gewicht und die kleinste Standardabweichung dem nivellierten Höhenunterschied mit dem größten Gewicht zugeordnet (vergleiche obige Formel).

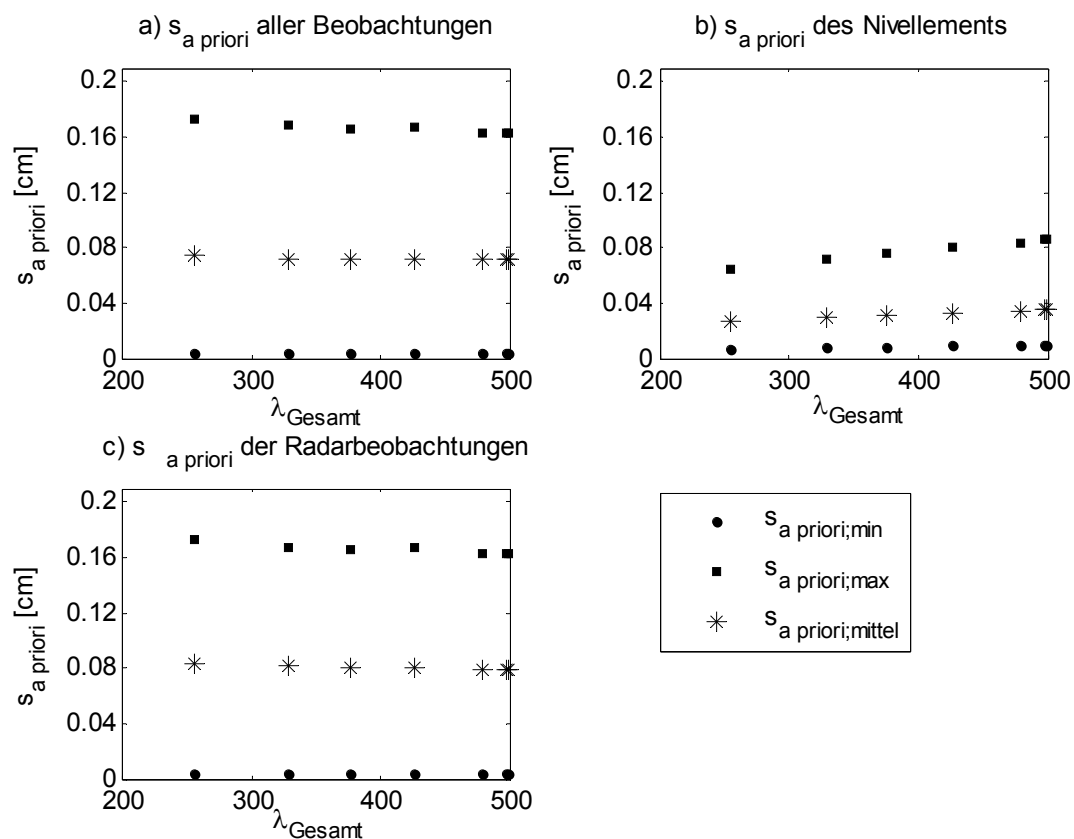


Abbildung 2.18: Maximale, minimale und durchschnittliche a priori Standardabweichung in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]

Die Veränderung der Standardabweichung über die gesamte Berechnung ist auf die Verschiebung der Gewichte der Beobachtungsgruppen zueinander und auf die Veränderungen in der Gesamtheit der Beobachtungen durch die variierende Herausnahme grob fehlerhaften Beobachtungen zurückzuführen.

a posteriori Standardabweichungen der Beobachtungen

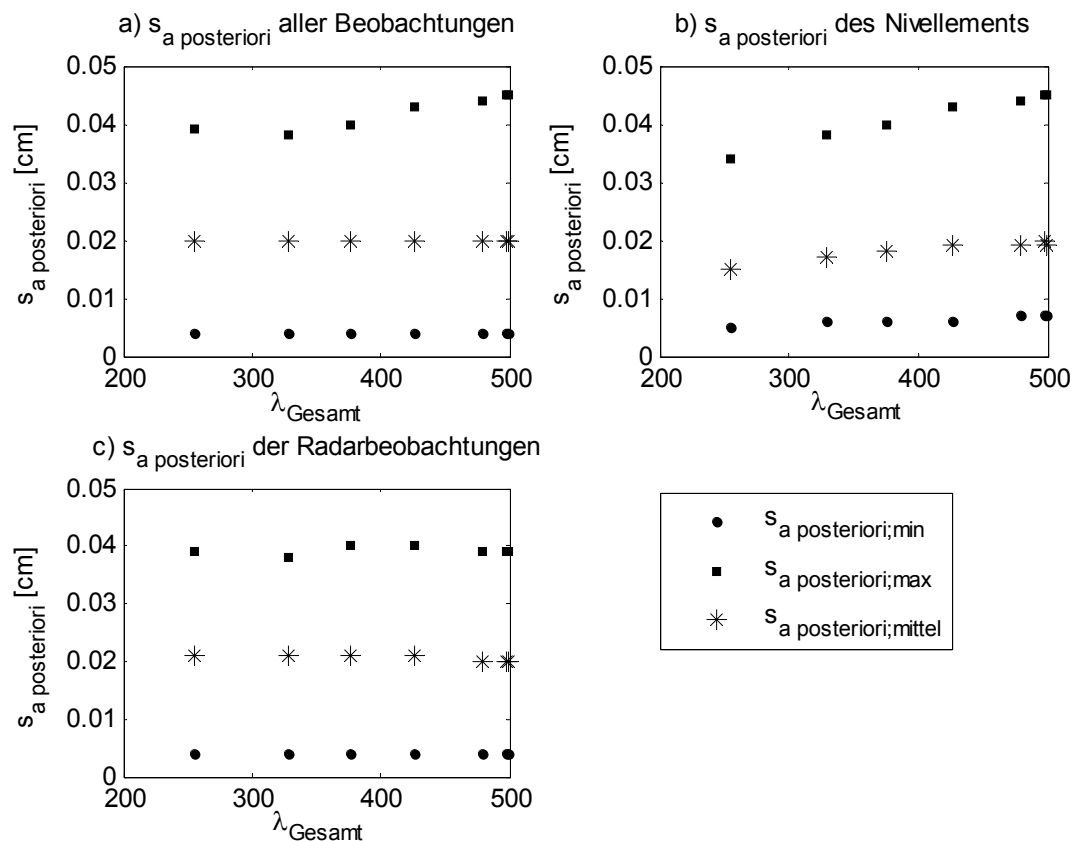


Abbildung 2.19: Maximale, minimale und durchschnittliche a posteriori Standardabweichung in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]

Entsprechend der a priori Standardabweichung wurde die a posteriori Standardabweichung gegen λ_{Gesamt} aufgetragen. Der Vergleich der Graphen der Abbildung 2.18 und Abbildung 2.19 zeigt, dass die Standardabweichung der Beobachtungen durch die Ausgleichung erheblich sinkt.

Bei den nivellierten Beobachtungen steigen die Standardabweichungen mit zunehmendem λ_{Gesamt} , bei den radarinterferometrischen bleiben die Kennwerte über die Iteration nahezu konstant. Dadurch werden in den ersten Iterationsschritten die maximalen Standardabweichungen durch die Radarinterferometrie gestellt, diese gehen im Laufe der Berechnung dann auf die nivellierten Höhenunterschiede über.

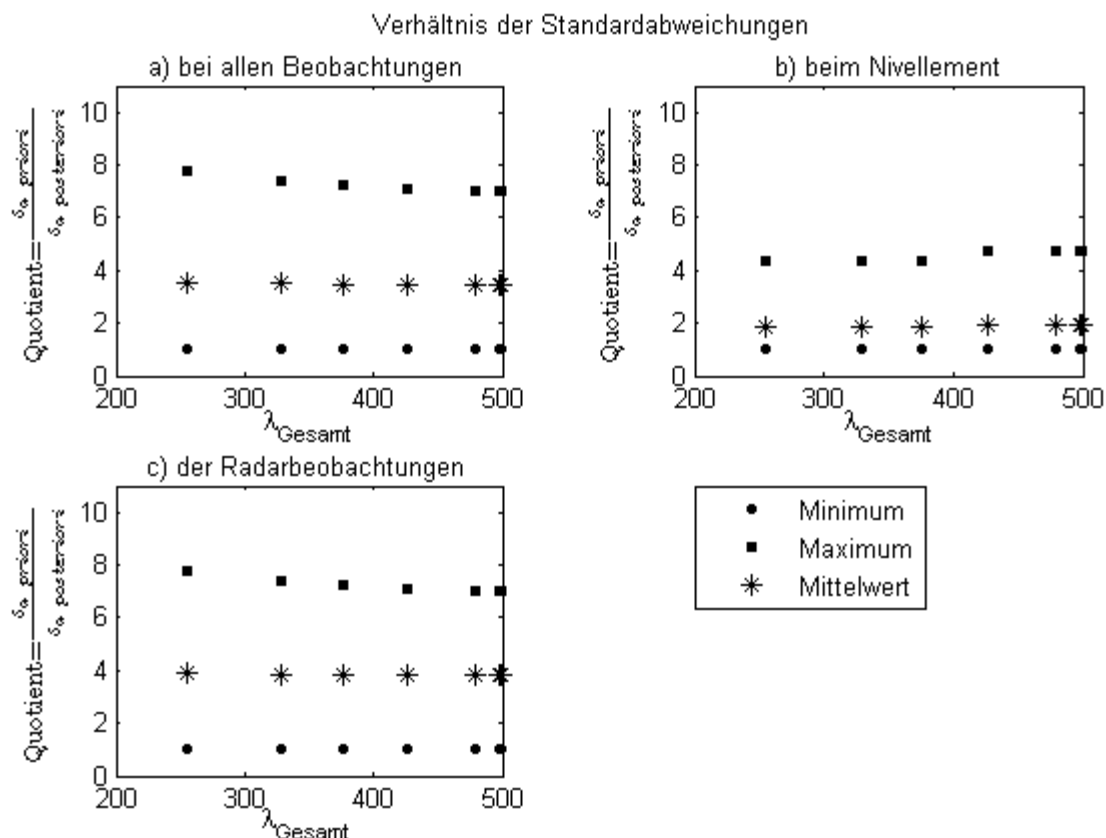


Abbildung 2.20: Maximaler, minimaler und durchschnittlicher Genauigkeitsgewinn in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]

Die Steigerung der Genauigkeit der Beobachtungen durch die Ausgleichung ist in Abbildung 2.20 dargestellt. Sie ist bei den radarinterferometrischen Höhenänderungen deutlich größer als bei den durch Nivellement bestimmten.

Standardabweichungen der Höhen

Abschließend werden nun die Unbekannten, also die Höhen der Punkte zu einem Zeitpunkt untersucht. Wie in den obigen Abbildungen sind hier die maximalen, minimalen und mittleren Werte in Abhängigkeit von λ_{Gesamt} dargestellt. In Abbildung 2.22 wird nach der Art der Höhenbestimmung unterschieden. Der Vergleich der Graphen (a) und (b) zeigt deutlich, dass sowohl die größten als auch die kleinsten Standardabweichungen für die Höhen bei den durch Nivellement bestimmten Höhenunterschieden auftreten. Dies ist im Messnetz begründet. Die kleinste Standardabweichung zeigt in allen Iterationsschritten der Punkt 1 (Abbildung 2.21), der bei der ersten Messkampagne am nächsten am Anschlusspunkt liegt. Die Standardabweichung der anderen Messungen an diesem Punkt und am später noch zusätzlich geschaffenen Punkt 29 liegen in etwa in dieser Größenordnung.

Die größte Standardabweichung ist am Punkt 117 zu finden. Dieser Punkt hat den größten Abstand zum Anschlusspunkt. Bei diesem Punkt handelt es sich um den Corner-Reflektor,

der als Referenz für die anderen dient. Seine Höhe wird daher nur durch das Nivellement bestimmt. Eine Steigerung der Genauigkeit durch Kombination beider Messverfahren deshalb ist nicht möglich.

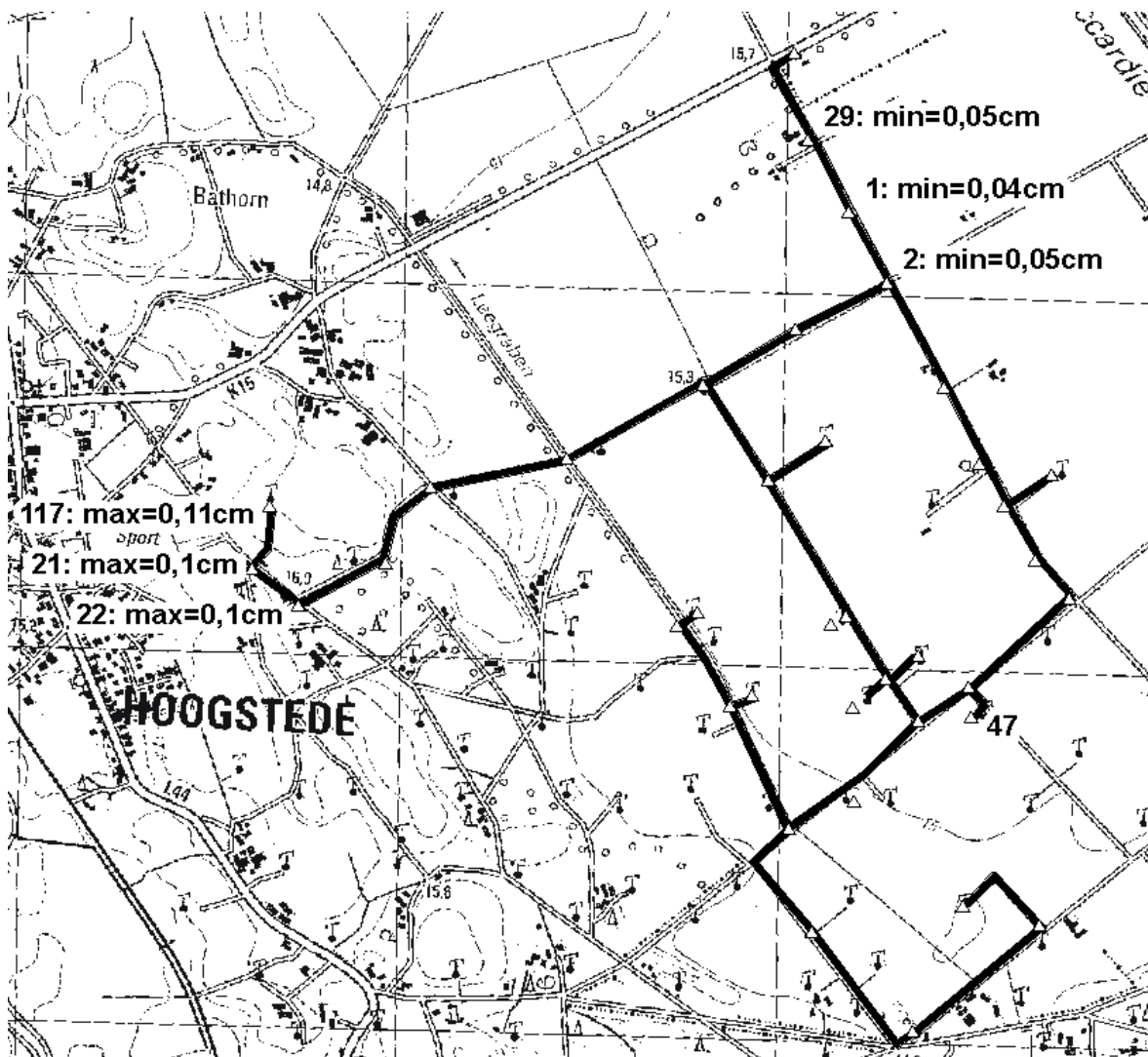


Abbildung 2.21: Lage der Punkte mit der kleinsten und größten Standardabweichung

Im Vergleich von Abbildung 2.22 (c) und (d) zeigt sich, dass die Schnittstellen beider Messverfahren im Minimum, im Maximum und im Mittelwert kleinere Standardabweichung aufweisen, als die nur durch Radarinterferometrie bestimmten. Durch diese in beide Verfahren enthaltenen Messpunkte bekommt das gesamte Netz seine hohe Genauigkeit.

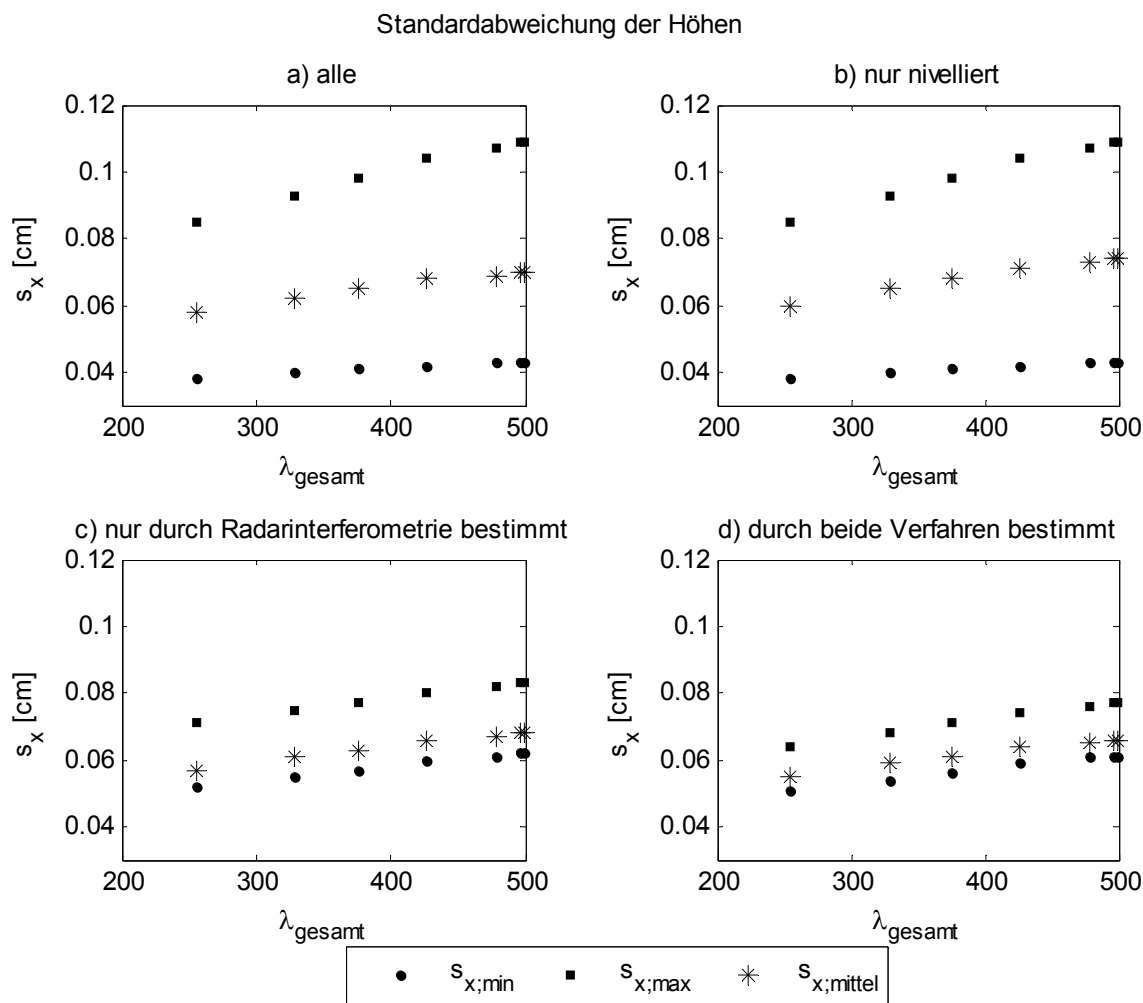


Abbildung 2.22: Maximale, minimale und durchschnittliche Standardabweichung der unbekannten Höhen in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Höhen; b) nur durch Nivellement bestimmte Höhen; c) nur durch Radarinterferometrie bestimmte Höhen; d) durch beide Verfahren bestimmte Höhen]

In den nachfolgenden beiden Abbildungen sind die Ergebnisse der Höhen mit den zugehörigen Genauigkeiten gemeinsam dargestellt. Abbildung 2.23 zeigt den Verlauf der ausgeglichenen Höhen in Relation zur Nullmessung. Die Unterschiede im Verlauf der Kurven sind auf die verschiedenen in der Ausgleichung verbleibenden Beobachtungen der Radarinterferometrie zurückzuführen. Von den 210 radarinterferometrischen Beobachtungen des Corner-Reflektor 47 fallen bei der einzelnen Ausgleichung der Zeitreihe, wie in Kapitel 2.4 beschrieben, lediglich 6 Beobachtungen als grobe Fehler heraus. Durch Hinzunahme der nivellierten Höhenunterschiede fallen mehr interferometrisch bestimmte heraus. So verbleiben im ersten Iterationsschritt 193 den Corner-Reflektor betreffende Beobachtungen in der Berechnung, in der letzten Ausgleichung dann nur noch 189. Gerade in der Höhe zum Zeitpunkt der Radarszene 22979, dem ersten Zeitpunkt, ist durch die Hinzunahme des Nivellements eine deutliche Änderung im ausgeglichenen Wert zu erkennen. Bei den anderen gemeinsamen Punkten beider Messverfahren [27488 und 32498 (↑)] fallen diese Unterschiede nicht auf. Da Beobachtungen mit diesen Zeitpunkten nicht nennenswert

häufiger aus der gemeinsamen Berechnung herausfallen. Zum Zeitpunkt 34250 (\downarrow) fand keine Aufnahme durch den Satelliten statt. Hier wurde das Nivellement zwischen zwei Aufnahmen durchgeführt. Daher wurde dieses Nivellement keinem Zeitpunkt der Radardaten zugeordnet, sondern der Zeitpunkt 34250 zusätzlich eingeführt. Deshalb ist für die einzelne Ausgleichung der Zeitreihe des Corner-Reflektors 47 an dieser Stelle interpoliert, während die gemeinsamen Auswertungen hier einen Wert liefern.

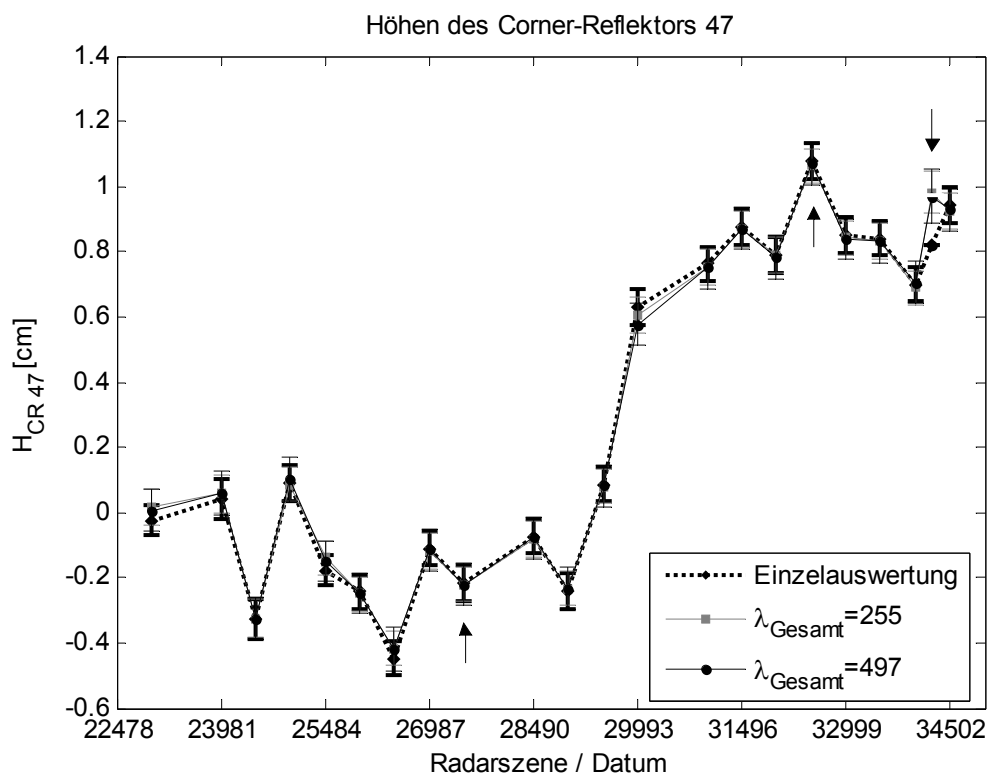


Abbildung 2.23: Ausgeglicheene Höhen des Corner-Reflektors 47 mit den dazugehörigen Standardabweichungen

Da in Abbildung 2.23 der Vergleich der Standardabweichungen schwierig ist, sind sie in Abbildung 2.24 noch einmal einzeln aufgezeigt. Wie bereits in Abbildung 2.22 dargestellt, steigt mit zunehmendem λ_{Gesamt} die Standardabweichung der Unbekannten. Die Standardabweichungen bei der Berechnung mit $\lambda_{\text{Gesamt}} = 255$ entsprechen dabei in etwa der der Ausgleichung der einzelnen Zeitreihe. Die Schwankungen in diesen Graphen sind auf die unterschiedliche Anzahl an verbleibenden Beobachtungen und auf deren verschiedene Gewichte zurückzuführen.

Zum Zeitpunkt 34250 (\downarrow) nimmt die Standardabweichung einen hohen Wert an, da zu diesem Zeitpunkt, wie bereits oben beschrieben, die Höhen nur durch das Nivellement bestimmt wurden. Da alle Corner-Reflektoren verhältnismäßig große Entfernungen zum Anschlusspunkt des Nivellements aufweisen, ist die Standardabweichung der Höhe zu diesem Zeitpunkt größer als bei den ausschließlich durch Radarinterferometrie bestimmten (vergleiche Abbildung 2.22).

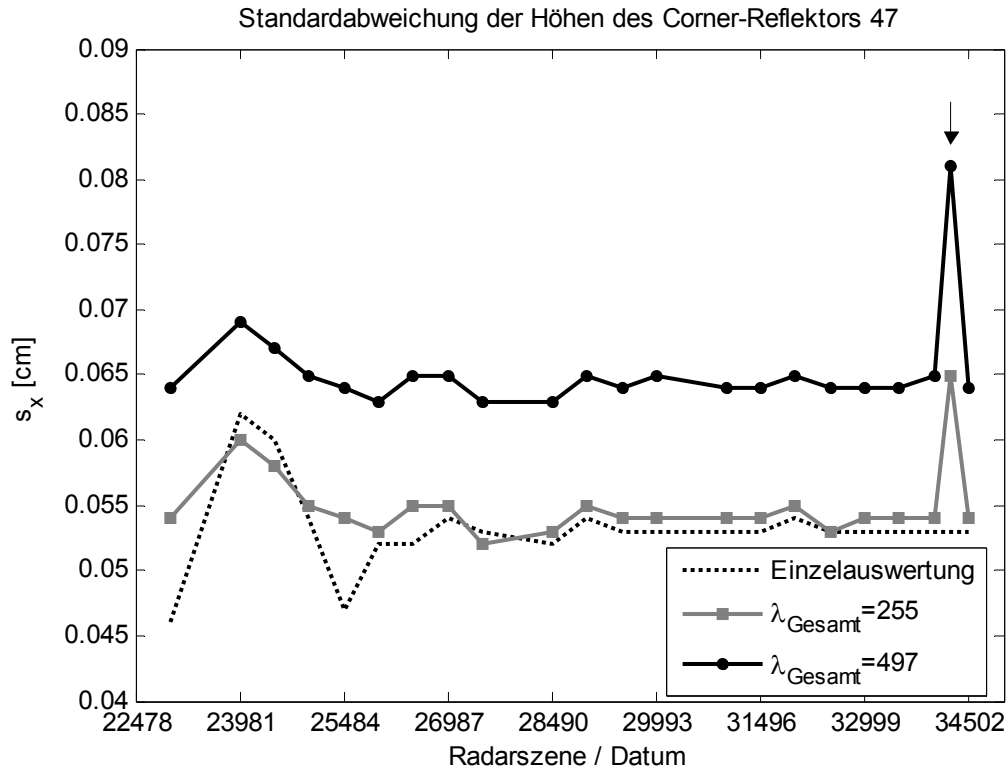


Abbildung 2.24: Standardabweichung der ausgeglichenen Höhen des Corner-Reflektors 47

2.5.2 Iterative Varianzkomponentenschätzung mit ungewichteten Beobachtungen

Neben einer Auswertung mit Gewichten wurde eine Auswertung und damit eine Varianzkomponentenschätzung mit ungewichteten Beobachtungen durchgeführt. Hiermit kann die Genauigkeit der beiden Beobachtungsgruppen zueinander abgeschätzt werden, wenn es keine Möglichkeit gibt, Gewichte innerhalb der Beobachtungsgruppen festzulegen. In Abbildung 2.25 ist die Veränderung des Faktors λ_{Gesamt} dargestellt. Da zu Beginn der Berechnung für beide Gruppen die Gewichte mit eins festgelegt wurden, zeigt die Abbildung ebenfalls die neuen Gewichte der Radardaten. Das Diagramm zeigt im Vergleich mit Abbildung 2.13 ferner, dass in diesem Beispiel mehr Iterationsschritte notwendig sind, um die Abbruchbedingungen zu erreichen. Die Anzahl, der in der Berechnung verbleibenden Beobachtungen beider Messverfahren, ändert sich innerhalb der Iteration stärker. Erst nach fünf Iterationsschritten werden annähernd die Beobachtungen zur Berechnung von λ benutzt, die auch in letzten Schritt zur Bestimmung der Unbekannten benutzt werden (Abbildung 2.26).

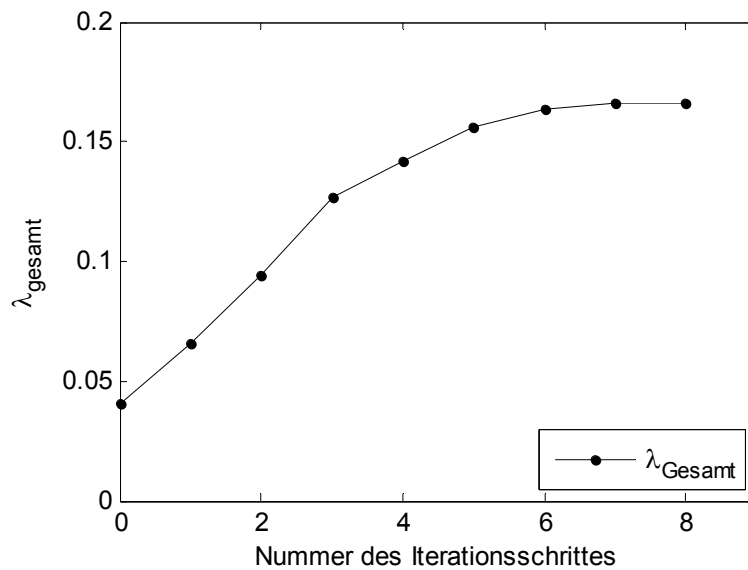


Abbildung 2.25:
Korrekturfaktor
 λ_{Gesamt} im Verlauf
der Iteration

Abbildung 2.26 zeigt analog zu Abbildung 2.14 den prozentualen Anteil der einzelnen Beobachtungsgruppen. Dabei ist zum einen zu erkennen, dass bei der Berechnung mit ungewichteten Beobachtungen ein größerer Anteil in der Ausgleichsrechnung herausgenommen wird. Zudem steigt die Gesamtzahl der Beobachtungen, die in der Auswertung verbleiben, durch die Zunahme bei den nivellierten Höhenunterschieden zuerst an und nimmt nach dem dritten Iterationsschritt stark ab, was wiederum in einer größeren Anzahl herausgenommener interferometrischer Höhenänderungen begründet ist.

Die Veränderungen innerhalb einer Beobachtungsgruppe sind dabei im Vergleich zu der Auswertung mit gewichteten Beobachtungen etwa doppelt so groß. Zum anderen ist die Verschiebung hin zum Nivellement bei dieser Rechnung ausgeprägter als in der zuvor beschriebenen.

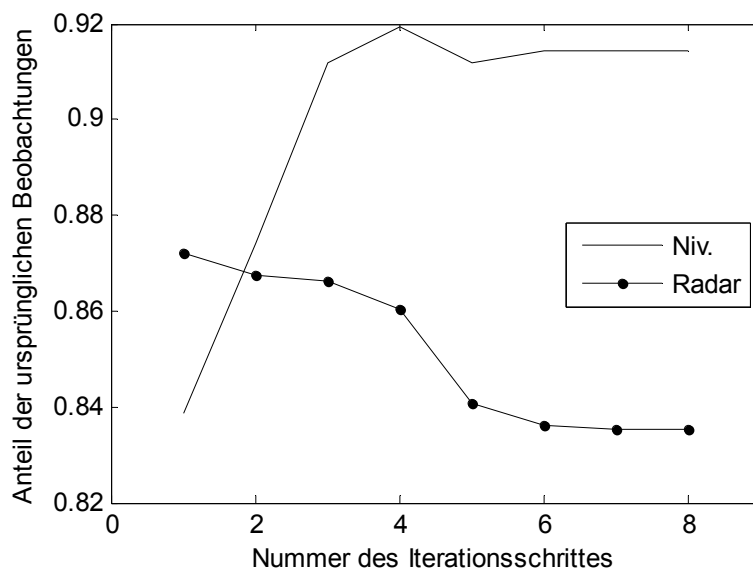


Abbildung 2.26:
Anteil, der in der
Berechnung
verbleibenden
Beobachtungen

Der größere Anteil an herausgenommenen Beobachtungen bedeutet neben den zusätzlichen Iterationsschritten, eine zusätzliche Verlängerung der Rechenzeit. Daher ist es empfehlenswert, sinnvolle Gewichte für die Beobachtungen einzuführen, so wie in (Ge 2010) über die Kohärenz der Interferogramme oder wie hier, in Abhängigkeit der räumlichen Basislinie definiert. Dadurch verbleiben mehr Beobachtungen in der Auswertung. Ihre möglicherweise großen Verbesserungen werden durch kleine Gewichte eine kleinere normierte Verbesserung aufweisen. Dies ist bei gleichgewichteten Beobachtungen nicht möglich.

2.6 Zusätzliche Anwendungsmöglichkeiten der Ausgleichsrechnung

2.6.1 Korrektur von Phasensprüngen

Mit einer Ausgleichung können die Beobachtungen für die eigentliche Ausgleichung vorab aufbereitet werden, indem nach Phasensprüngen in den Ausgangsdaten gesucht und diese dann beseitigt werden.

In der nachfolgenden Abbildung sind die gemessenen Höhenänderungen, bezogen auf die jeweiligen Ausgangsszenen, dargestellt.

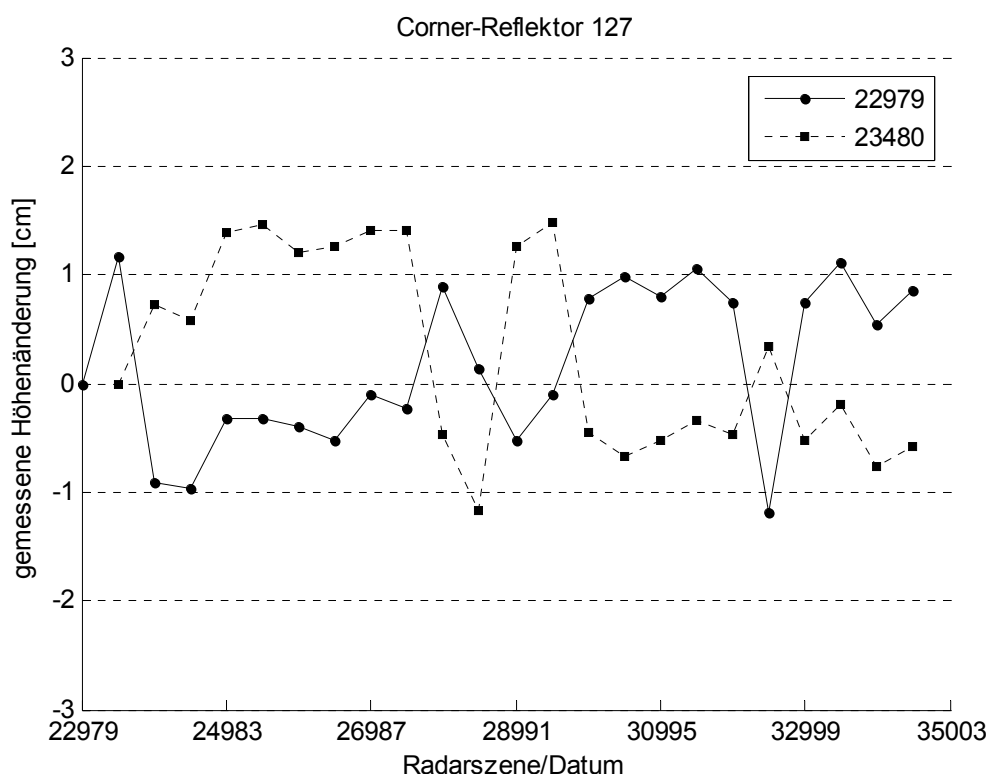


Abbildung 2.27: Auftretende Phasensprünge (Corner-Reflektor 127)

Die unterschiedlichen Lösungen für die Phasen zeigen sich in den Schnittpunkten der beiden Messreihen. An diesen Stellen treten unterschiedliche Bewegungsrichtungen auf. Kommen diese Phasenunterschiede nur bei einigen wenigen Messreihen vor, ergeben sich für diese Beobachtungen positive oder negative Verbesserungen, die etwa einem Phasensprung

entsprechen. An diese Beobachtungen wird dann abhängig vom Vorzeichen der Verbesserung der Wert von 2,98 Zentimetern addiert oder subtrahiert (vergleiche Kapitel 2.3). Da die Verbesserungen einer Beobachtung immer durch die anderen Beobachtungen beeinflusst sind, ist es sinnvoll, den Grenzwert für diese Berechnungen auf 60 bis 70 Prozent eines Phasensprunges festzulegen.

Nach der Eliminierung der Phasensprünge verlaufen die gemessenen Höhenänderungen zu verschiedenen Bezugsszenen dann annähernd parallel (Abbildung 2.28).

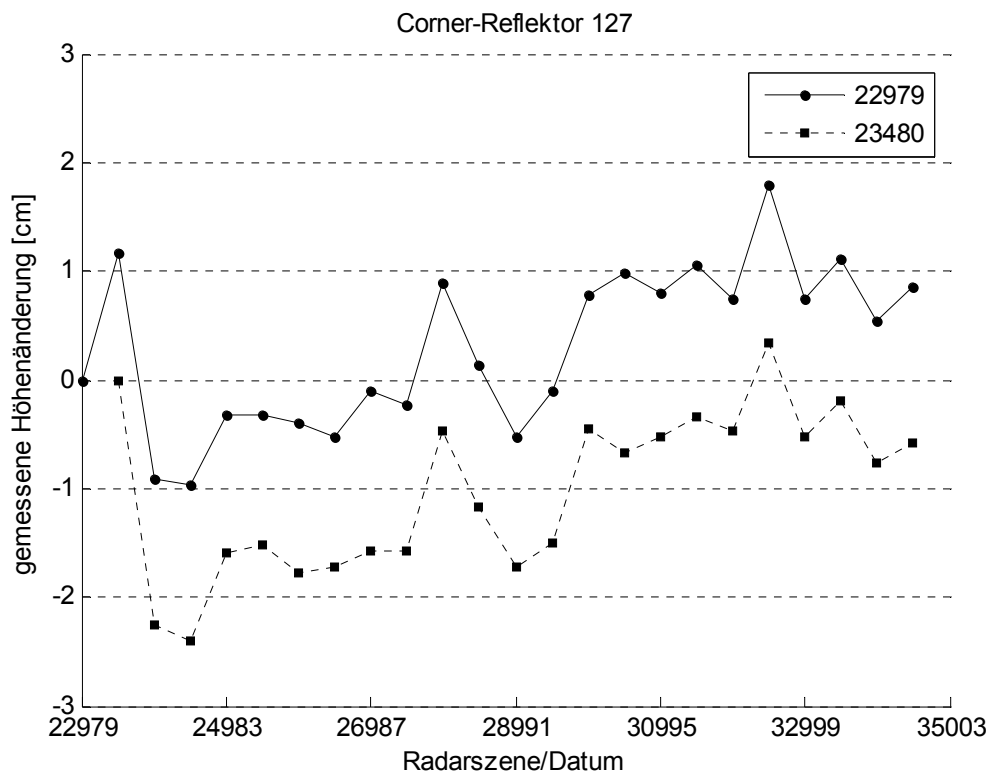


Abbildung 2.28: Korrektur der auftretenden Phasensprünge (Corner-Reflektor 127)

Mit den so veränderten Beobachtungen kann im Anschluss an diese Vorabausgleichung die eigentliche Ausgleichung erfolgen.

Über die Ausgleichungsrechnung kann allerdings nur für eine geringe Anzahl der Beobachtungen eine Phasenkorrektur festgestellt. Die Mehrheit der Beobachtungen muss die Höhenänderung richtig beschreiben, um fehlerhafte Messungen korrigieren zu können.

2.6.2 Verbinden getrennter Messbereiche

Neben der gegenseitigen Kontrolle der beiden unterschiedlichen Messverfahren kann die Ausgleichung ebenfalls dazu dienen, zeitliche oder räumliche Lücken zu schließen. Durch das Nivellement kann eine Verbindung zwischen Bereichen hergestellt werden, die durch Auswertungen der Radarinterferometrie nur separat bestimmt werden konnten. Dies kann auftreten, wenn Ortschaften (vergleiche Bereich I und II in Abbildung 2.29) durch Wald oder andere Vegetation voneinander getrennt sind. Durch Nivellement kann beiden Bereichen absolute Höhen zugewiesen und damit die Höhenunterschiede zwischen diesen zwei Bereichen abgeleitet werden.

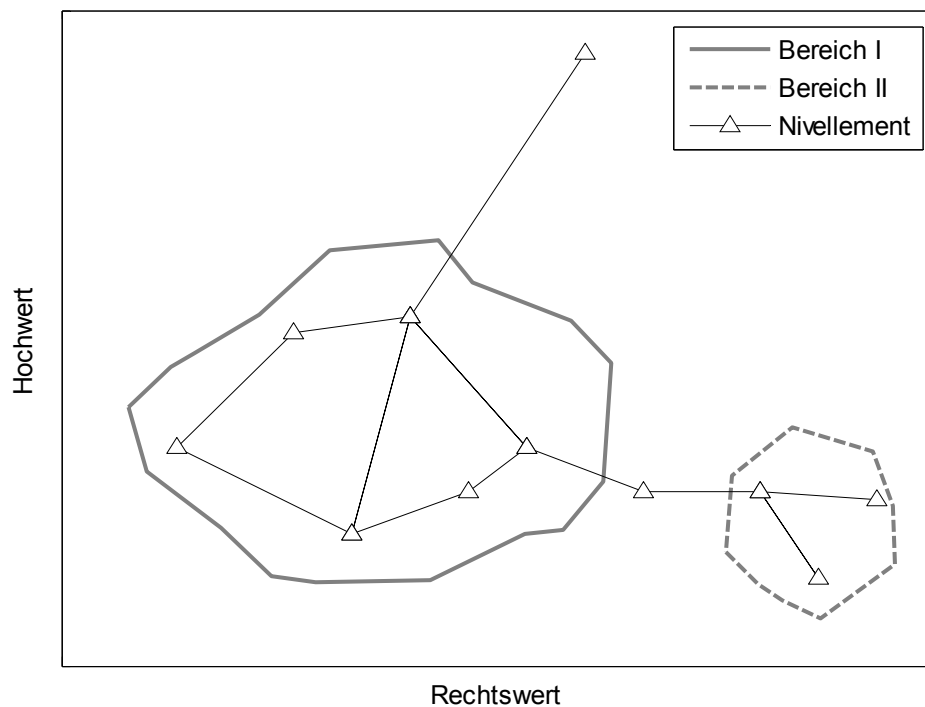


Abbildung 2.29: Verbinden räumlich getrennter Messgebiete

Bei der Radarinterferometrie kann es durch Sensorausfall vorkommen, dass in einer Messreihe zeitliche Lücken entstehen, die durch nachfolgende Messungen nicht geschlossen werden können (beispielsweise lange, schneereiche Winter), da die Phasenbeziehung nicht mehr hergestellt werden kann.

In diesen Fällen kann die gemeinsame Ausgleichung von Radar- und Nivellementsdaten hilfreich sein. Beiden bisher voneinander unabhängigen Zeitreihen werden durch die Ausgleichung über gemeinsame Zeitpunkte beider Messverfahren Höhen zugewiesen (vergleiche Zeitreihe I und II in Abbildung 2.30). Dadurch ist es anschließend möglich, die Radardaten zu einer Zeitreihe zusammenzufügen.

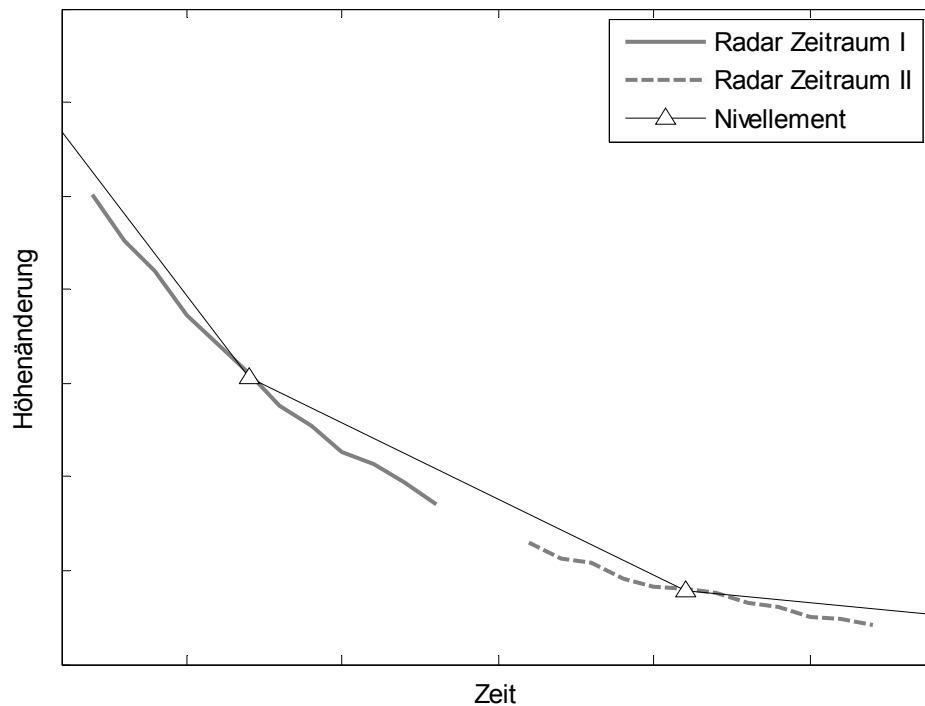


Abbildung 2.30: Zusammenführen von Radarzeitreihen mittels Nivellement durch gemeinsame Ausgleichung

Neben der gemeinsamen Ausgleichung von Nivellement und DInSAR wäre eine gemeinsame Ausgleichung von Höhenänderungen unterschiedlicher Radarsensoren denkbar, um eine Zeitreihe für einen Corner-Reflektor zu erzeugen. Dafür ist es notwendig, dass die Messungen zeitgleich oder kurz nacheinander erfolgen.

3 Zusammenführung unterschiedlicher Zeitreihen

Im Gegensatz zum ersten Schwerpunkt dieser Arbeit ist es mitunter nicht möglich, mit die verschiedenen Messverfahren an identischen Punkten zu nahezu gleichen Zeitpunkten durchzuführen. In diesen Fällen ist es jedoch ebenso gewünscht, Messreihen verschiedener Messarten oder verschiedener Sensoren gemeinsam als eine Zeitreihe darzustellen. So finden Messungen durch die verschiedenen Radarsatelliten fast nie an gleichen Tagen statt, oder in der Auswertung finden Aufnahmen aus verschiedenen Richtungen an verschiedenen Tagen Berücksichtigung. Werden, wie beim Beispiel im ersten Teil der Arbeit, unterschiedliche Messverfahren durch technische Umbauten an derselben Stelle durchgeführt, kann eine terrestrische Messung nur vor oder nach dem Überflug des Corner-Reflektors erfolgen. Nur bei langsamen oder keinen Bewegungen im Messgebiet können die Zeitpunkte der Messungen gleich gesetzt werden.

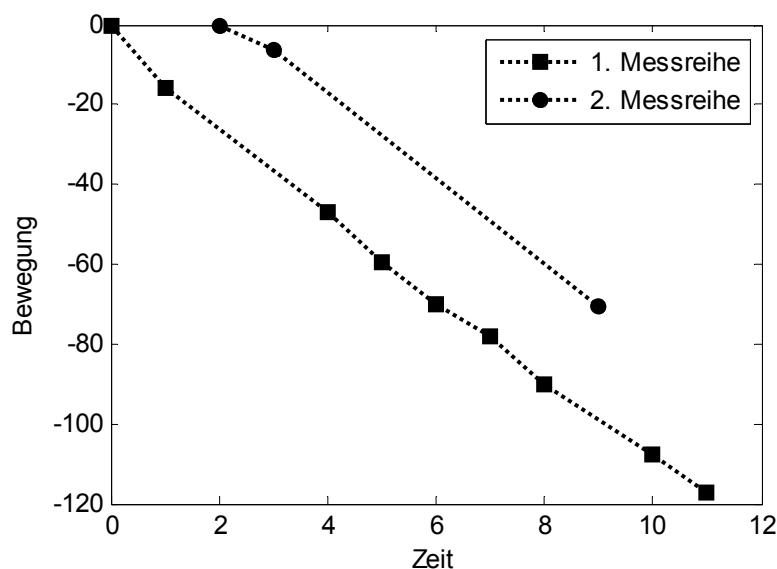


Abbildung 3.1:
Messreihen mit
Nullmessungen zu
unterschiedlichen
Zeitpunkten (Inter-
polation durch
Geradenstücken)

Für eine solche Verknüpfung zweier Zeitreihen ist es notwendig, die diskreten Aufnahmezeitpunkte sinnvoll miteinander zu verbinden, um die Bewegungen abbilden zu können.

Hierfür können Methoden der Interpolation und Approximation verwendet werden. Bei der Interpolation verläuft die gesuchte Funktion durch alle gegebenen Punkte. Bei der Approximation werden die Parameter der gesuchten Funktion so bestimmt, dass die Differenz zwischen den gegebenen Werten und den Funktionswerten minimal ist. Die Interpolation ist somit ein Spezialfall der Approximation, bei der der Abstand zwischen der gesuchten Funktion und den gegebenen Werten verschwindet (Schwarz und Köckler 2006). Interpolationen und Approximationen ermöglichen somit eine näherungsweise Ermittlung von zeit- oder ortsabhängigen Messwerten, für die keine Messungen durchgeführt wurden (Plato 2006). Für die folgenden Betrachtungen bleiben die Differenzen innerhalb der Zeitreihen erhalten.

3.1 Grundlagen der Interpolation

3.1.1 Lineare Interpolation

Die lineare Interpolation ist eine einfache Methode zum Verbinden benachbarter Punkte. Die Parameter der Geradengleichungen werden wie folgt bestimmt:

$$S_i(T) = c_1 \cdot (T - T_i) + c_0 \quad (3-1)$$

mit
$$c_1 = \frac{S_{i+1} - S_i}{T_{i+1} - T_i} \quad (3-2)$$

und
$$c_0 = S_i \quad (3-3)$$

mit	S	Ordinate
	T	Abszisse
	c_1	Anstieg der Geraden
	c_0	Absolutglied der Geraden
	i	Nummer des betrachteten Intervalls

Für die zweite Datenreihe muss nun der Verschiebungsbetrag v berechnet werden. Dafür wird die Differenz der Ordinatenwerte zur Interpolation angewendet. Hierfür wird wiederum die Methode der kleinsten Quadrate verwendet (vergleiche Abschnitt „Vermittelnde Ausgleichung“ in Kapitel 2.1).

$$\sum_{j=1}^n (S_j - S_{j,opt})^2 \rightarrow \min \quad (3-4)$$

mit	$S_{j,opt}$	Wert der Gerade an der Stelle T_j
	j	Nummer des Punktes der zweiten Zeitreihe
	n	Anzahl der Messpunkte

Diese so formulierte Zielfunktion entspricht dem Mittelwert der Differenzen zwischen dem Wert der 2. Messreihe und dem Funktionswert der zugehörigen Geradengleichung (Büchter und Henn 2005).

$$v = \frac{\sum_{j=1}^n (S_j - S_{j,opt})}{n} \quad (3-5)$$

mit	v	Verschiebungsbetrag der zweiten Messreihe
-----	-----	---

Dieser Wert wird nun an alle Werte der Ordinaten der zweiten Messreihe angebracht.

$$S_{verb} = S_j + v \quad (3-6)$$

Nach dieser Berechnung ergeben sich für die beiden Messreihen aus Abbildung 3.1 die in der nachfolgenden Graphik dargestellte Kombination.

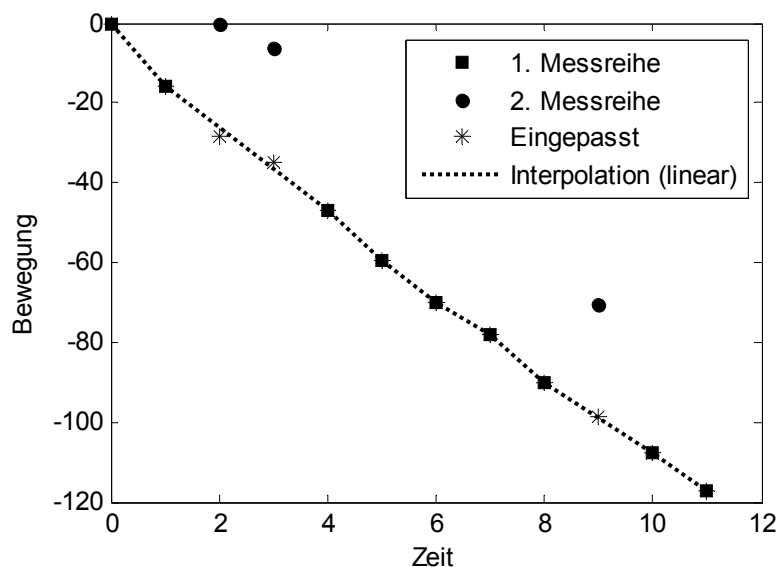


Abbildung 3.2:
Einpassen der 2.
Messreihe in die
Werte der 1.
Messreihe

Für Datenreihen mit etwa konstanten Steigungen und annähernd gleichen Abständen zwischen den Abszissenwerten liefert das Einpassen durch lineare Interpolation gute Ergebnisse.

Abbildung 3.3 zeigt zwei mögliche Kurven, die bei Verwendung der linearen Interpolation gleiche Ergebnisse liefern. Unabhängig davon, ob die Messreihe konvex oder konkav verläuft, die Einpassung der zwei Messpunkte ist identisch. Deshalb ist es durchaus sinnvoll, nicht nur die Steigung zwischen den zwei Punkten, sondern ebenso die der benachbarten Messwerte zu betrachten.

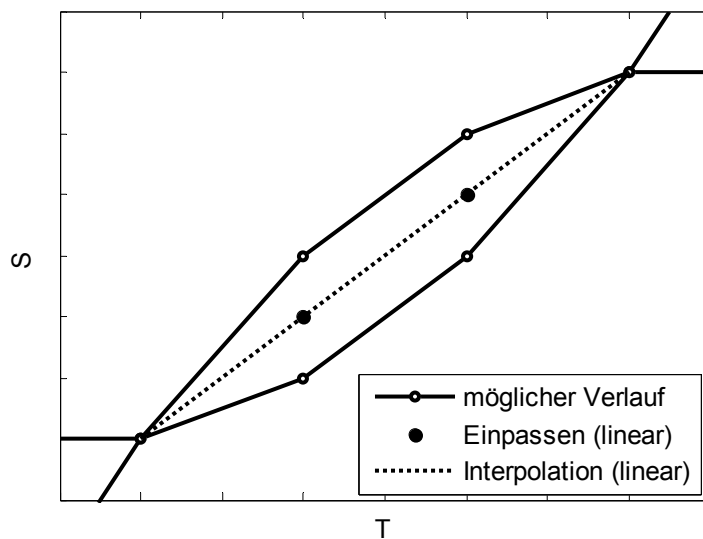


Abbildung 3.3:
Nachteil des
linearen
Interpolierens

Da Polynome höheren Grades in Randbereichen stark oszillieren (Abbildung 3.4), sind diese zur Interpolation nicht geeignet, sondern es wird auf zusammengesetzte Polynome niedrigerer Ordnung (Spline) zurückgegriffen. Neben den bereits beschriebenen linearen Splines, sind kubische Splines am weitesten verbreitet (Plato 2006).

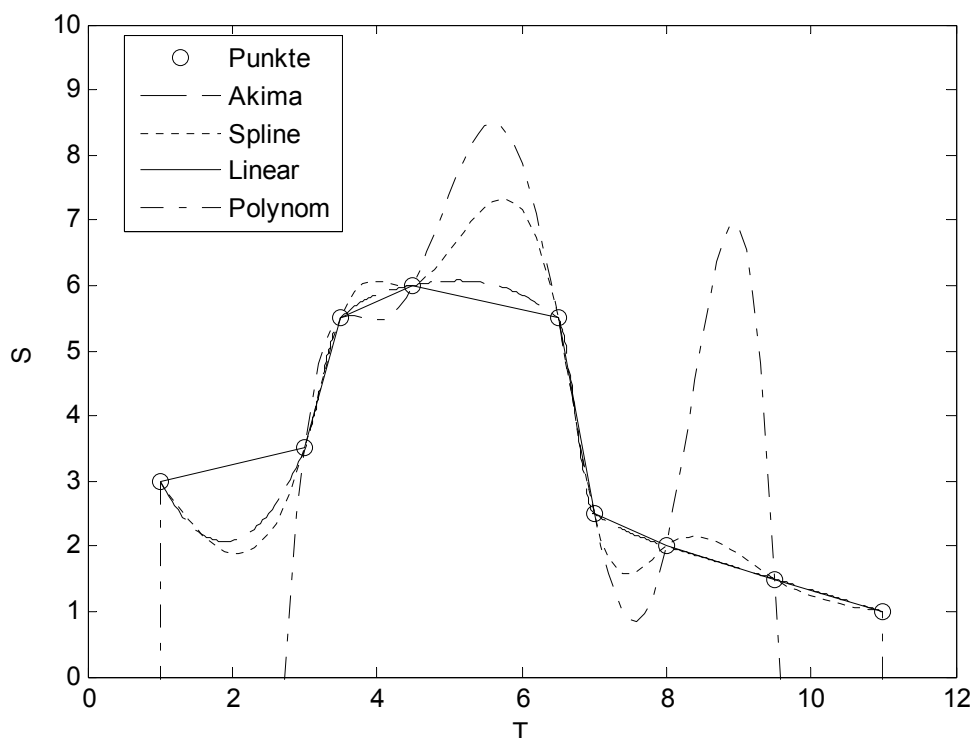


Abbildung 3.4: Vergleich verschiedener Interpolationen [Beispiel nach (Kraus 2000)]

Doch auch diese Interpolation zeigt Schwankungen (Abbildung 3.4 zwischen den Punkten $T=5$ und $T=7$). Ein weiterer Nachteil ist, dass alle Parameter der kubischen Funktionen

immer von der Lage aller zu interpolierender Punkte abhängig sind. Durch diese globale Wirkung verändert jeder zusätzliche Punkt den Verlauf des gesamten Polynoms. Eine ebenfalls kubische Interpolation (ohne Oszillation) mit lediglich lokaler Wirkung der einzelnen Punkte ist die Akima-Interpolation (Akima 1970; Kraus 2000).

3.1.2 Akima-Interpolation

Diese Interpolationsmethode wurde 1970 von Akima vorgestellt. Als Interpolation mit kubischen Funktionen müssen diese stückweise definierten Subsplines der Gleichung (3-7) genügen.

$$S_i(T) = c_3 \cdot (T - T_i)^3 + c_2 \cdot (T - T_i)^2 + c_1 \cdot (T - T_i) + c_0; \quad T \in [T_i, T_{i+1}] \quad (3-7)$$

mit c_i Koeffizienten der kubischen Funktion

Zur Berechnung der Koeffizienten c_i der kubischen Funktionen werden nicht alle Punkte verwendet, sondern nur die in unmittelbarer Nachbarschaft. Hierfür wird zuerst die Steigung S'_i im Punkt $P_i(T_i, S_i)$ bestimmt. Zu diesem Zweck werden die zwei Punkte P_{i-2} und P_{i-1} vor dem betrachteten Punkt und die zwei Punkte P_{i+1} und P_{i+2} dahinter (siehe Abbildung 3.5) verwendet.

Die Steigung S'_i wird als gewichtetes Mittel der Steigungen der beiden angrenzenden Intervalle bestimmt. Die Gewichte ergeben sich aus der Differenz der Steigungen der beiden vorherigen und der beiden nachfolgenden Intervalle [Formel (3-8)].

$$S'_i = \frac{|m_i - m_{i+1}| m_{i-1} + |m_{i-2} - m_{i-1}| m_i}{|m_i - m_{i+1}| + |m_{i-2} - m_{i-1}|} \quad (3-8)$$

mit $m_i = \tan \alpha_{i,i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{T_{i+1} - T_i}$ [vgl. (3-2)]

mit S'_i Steigung im Punkt i
 m_i Steigung der Sehne i
 $\alpha_{i,i+1}$ Steigungswinkel (siehe Abbildung 3.5)

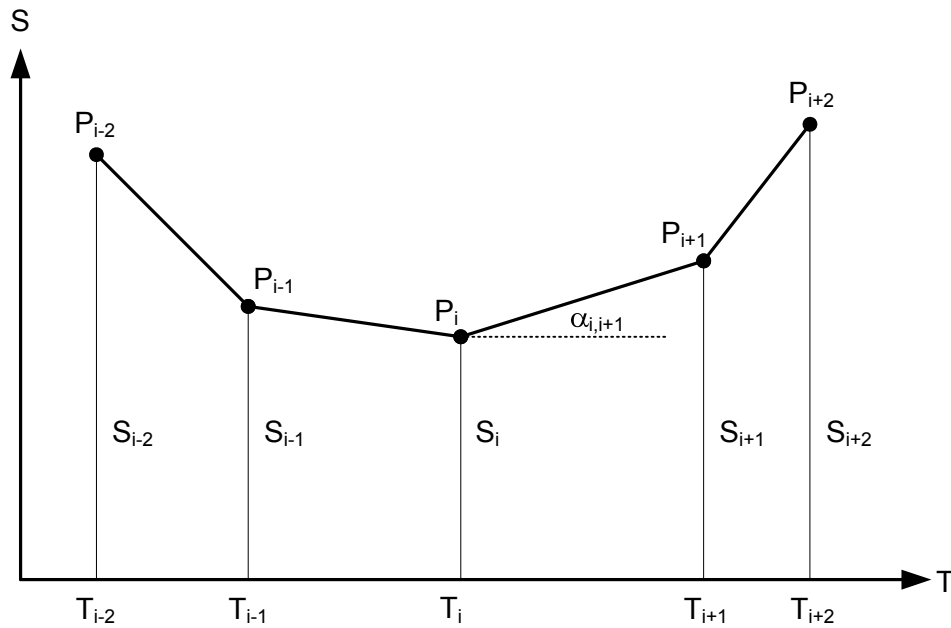


Abbildung 3.5: Prinzipische Skizze der Akima-Interpolation [nach (Kraus 2000)]

Um die Steigungen in allen Punkten bestimmen zu können, müssen vor den ersten und nach den letzten Punkten der Reihe zwei zusätzliche Punkte eingeführt werden. Dazu wird durch die drei an den Rändern liegenden Punkte jeweils eine Parabel bestimmt. Mit dieser werden die neuen Punkte außerhalb des Wertebereiches berechnet, die eine Schätzung der Steigungen in den Randpunkten ermöglichen.

Um die Parameter eines Intervalls bestimmen zu können, stehen die Koordinaten der beiden zugehörigen Punkte und die in ihnen auftretenden Steigungen zur Verfügung. Werden die Koordinaten in die kubische Funktion [Gleichung (3-7)] und die Steigungen in deren 1. Ableitung

$$S'_i(T) = 3 \cdot c_3 \cdot (T - T_i)^2 + 2 \cdot c_2 \cdot (T - T_i) + c_1; \quad T \in [T_i, T_{i+1}] \quad (3-9)$$

eingesetzt, liegen vier Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten vier Koeffizienten vor (Engeln-Müllges, Niederdrenk et al. 2011; Kraus 2000).

Diese lassen sich berechnen nach:

$$c_{0[i,i+1]} = S_i \quad (3-10)$$

$$c_{1[i,i+1]} = S'_i \quad (3-11)$$

$$c_{2[i,i+1]} = -\frac{S'_{i+1} + 2S'_i}{T_{i+1} - T_i} + 3\frac{S_{i+1} - S_i}{(T_{i+1} - T_i)^2} \quad (3-12)$$

$$c_{3[i,i+1]} = \frac{S'_{i+1} + S'_i}{(T_{i+1} - T_i)^2} - 2\frac{S_{i+1} - S_i}{(T_{i+1} - T_i)^3} \quad (3-13)$$

Abbildung 3.6 stellt noch einmal das bereits in Abbildung 3.3 vorgestellte Beispiel dar. Die Graphik zeigt das konkave und konvexe Verläufe mit dieser Form der Interpolation sehr gut angepasst werden können.

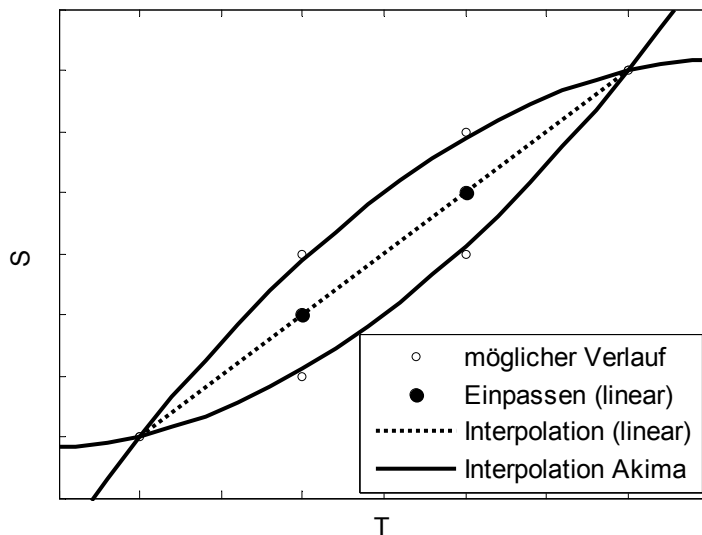


Abbildung 3.6:
Bessere Einnassung
durch die Akima-
Interpolation

Liegen drei zu interpolierende Punkte auf einer Geraden, verschwindet einer der Summanden im Nenner in Gleichung (3-8). Der Steigung im Punkt wird dann der Wert der Steigung der beiden angrenzenden Intervalle zugewiesen. Dieses Verhalten kommt einer freihändigen Interpolation sehr nahe (Kraus 2000).

Liegen mehr als drei Punkte auf einer Geraden wird diesen als Steigung ebenfalls der Wert der angrenzenden Intervalle zugewiesen. Liegt ein Stützpunkt dagegen auf einem Schnittpunkt zweier Geraden, ist eine Berechnung nach Formel (3-8) ebenso wenig möglich, wie eine sinnvolle Zuweisung eines Steigungswertes. Da die gesuchte Interpolation weiterhin zweifach stetig differenzierbar sein soll, wird der Eckpunkt durch zwei neue Punkte ersetzt. Die Interpolation verläuft nun durch die ursprünglichen und die neuen Punkte. Über einen

Faktor β ($0 < \beta < 1$) kann die Größe des Rundungsbereiches, wie in Abbildung 3.7 dargestellt, variiert werden (Engeln-Müllges, Niederdrenk et al. 2011).

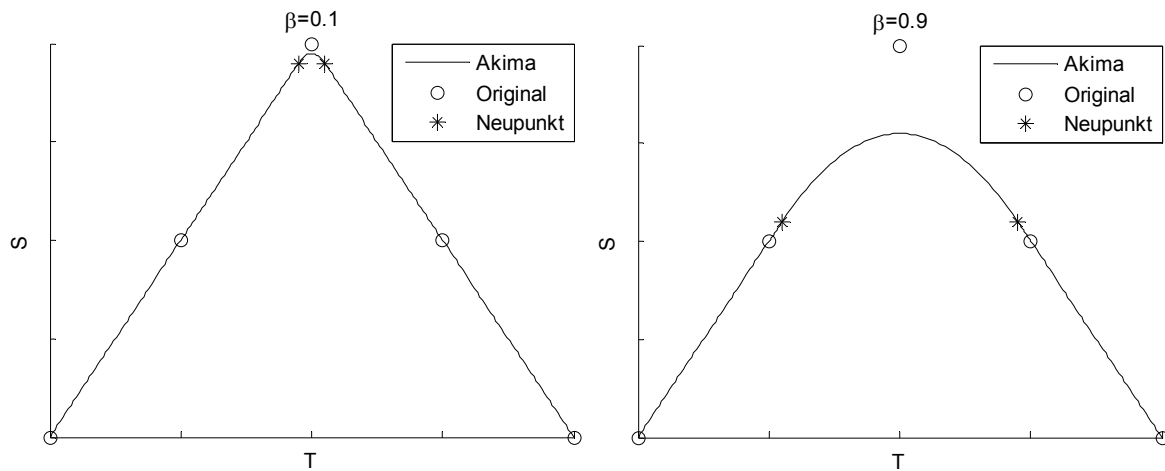


Abbildung 3.7: Verschiedene Rundungsbereiche am Schnittpunkt zweier Geraden

Nach der Interpolation wird wie in den Gleichungen (3-4) bis (3-6) beschrieben, der Verschiebungsbetrag v berechnet und an der zweiten Messreihe angebracht.

3.1.3 Einführung von Gewichten

Mit der Einführung von Gewichten wird aus der Berechnung des Verschiebungsbetrages v als arithmetisches Mittel wird nun ein gewichtetes Mittel.

$$v = \frac{\sum_{j=1}^n p_j (S_i - S_{j,opt})}{\sum_{j=1}^n p_j} \quad (3-14)$$

Hierfür werden drei Gewichte eingeführt:

- Gewicht entsprechend der Länge des Intervalls, in das der Punkt eingefügt wird,
- Gewicht nach dem kürzesten Abstand des Punkt zur anderen Messreihe,
- Gewicht bezüglich Punktzahl, die gemeinsam in einem Intervall liegen.

Die beiden ersten Gewichte lassen sich mit dem bei der Interpolation auftretenden Fehler begründen. Bei einer bekannten $(n+1)$ differenzierbaren Funktion $f(T)$ und dem inter

polierenden Polynom $P_n(T)$ berechnet sich die Differenz zwischen beiden nach (Engeln-Müllges, Niederdrenk et al. 2011; Plato 2006):

$$f(T) - P_n(T) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (T - T_i). \quad (3-15)$$

Der erste Faktor, der durch den Grad des Polynoms und die Lage der Stützpunkte bestimmt wird, ist konstant. Der Interpolationsfehler ist somit abhängig von der Lage des Punktes innerhalb eines Intervalls und der Größe der Intervalle. Nähert sich T einem Schnittpunkt T_i von Funktion und Polynom, geht der Interpolationsfehler gegen 0.

Wird kein Polynom maximalen Grades sondern das eines geringeren Grades verwendet, werden die Faktoren im Produkt weniger. Für eine lineare Interpolation ergibt sich entsprechend:

$$f(T) - P_n(T) = \frac{f''(\xi)}{2} (T - T_0)(T - T_1). \quad (3-16)$$

Daraus ist ersichtlich, dass bei dichter liegenden Stützstellen der Interpolationsfehler kleiner wird.

Gewicht entsprechend der Länge des Intervalls

Je größer der Abstand zwischen den Abszissenwerten ist, zwischen denen eingepasst werden soll, desto größer ist die Unsicherheit über den Verlauf in diesem Bereich (Abbildung 3.8 a). Der Verlauf einer Funktion kann für kürzere Intervalle (b) mit einer höheren Sicherheit beschrieben werden.

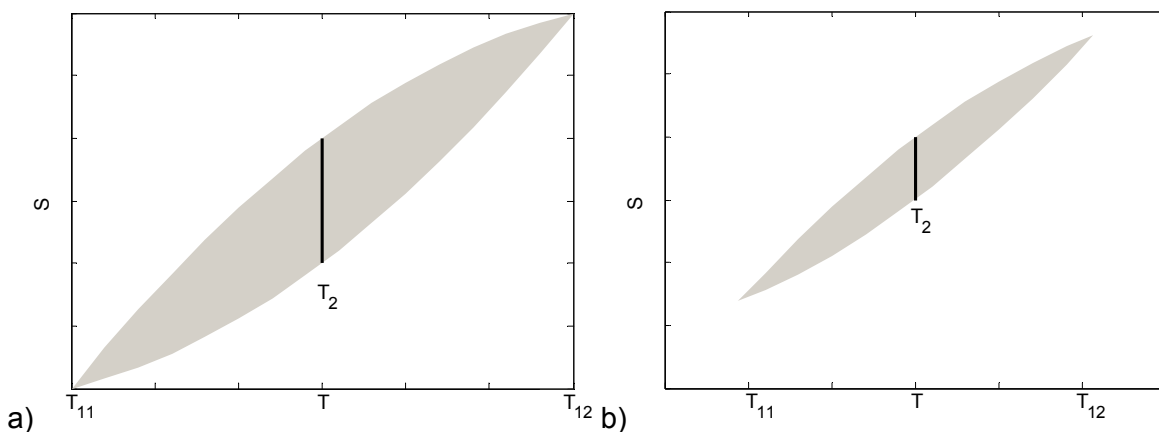


Abbildung 3.8: p_1 – Gewicht entsprechend der Länge des Intervalls; a) großer Bereich – kleines Gewicht; b) kleiner Bereich – großes Gewicht

Deshalb wird das erste Gewicht umgekehrt proportional zum Abstand der Punkte definiert.

$$p_1 = \frac{1}{T_{12} - T_{11}} \quad (3-17)$$

Gewicht nach dem kürzesten Abstand des Punkt zur anderen Messreihe

Bei der Interpolation verläuft die Funktion durch die gegebenen Punkte. Daher ist die Variabilität in ihrer Nähe kleiner als in der Mitte eines des betrachteten Intervalls. Diesen Punkten wird ein höheres Gewicht zugeordnet (Abbildung 3.9).

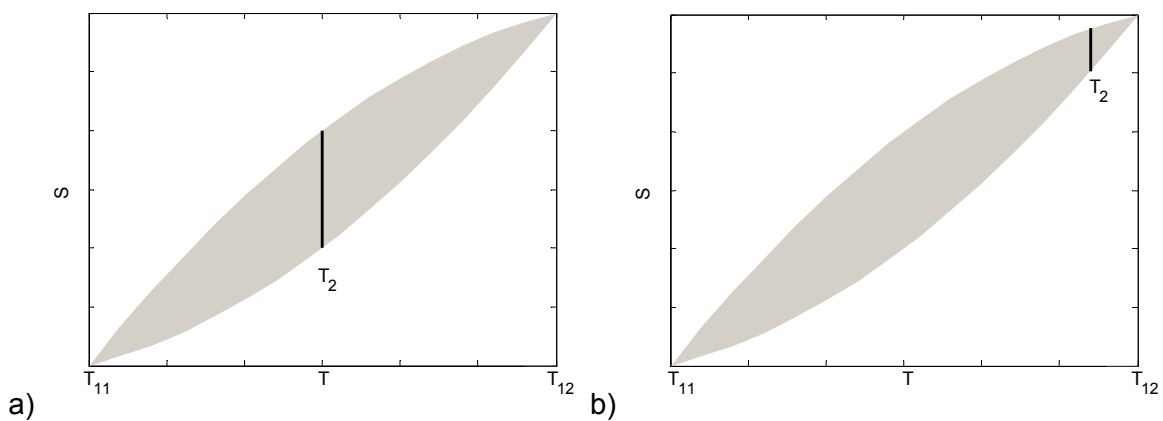


Abbildung 3.9: p_2 – Gewicht entsprechend des Abstandes zum nächstgelegenen Punkt der ersten Messreihe; a) großer Abstand – kleines Gewicht; b) kleiner Abstand – großes Gewicht

Deshalb wird analog zum ersten Gewicht dieses ebenso als Kehrwert eines Abstandes berechnet.

$$p_2 = \frac{1}{\min[(T_{12} - T_2); (T_2 - T_{11})]} \quad (3-18)$$

Gewicht bezüglich der Punktzahl innerhalb eines Intervalls

Abschließend wird noch ein drittes Gewicht eingeführt, welches die Anzahl der Punkte der zweiten Messreihe in einem Intervall der ersten Messreihe berücksichtigt. Befinden sich in einem Intervall auffallend viele Punkte und in anderen dagegen nur einzelne, dann wird der Verschiebungsbetrag v hauptsächlich durch die Interpolation in dem Intervall mit den vielen Punkten bestimmt. Daher wurde ein drittes Gewicht gemäß der Punktzahl der 2. Messreihe eingeführt, die gemeinsam in einem Intervall liegen.

$$p_3 = \frac{1}{\text{Anzahl(Punkte)}} \quad (3-19)$$

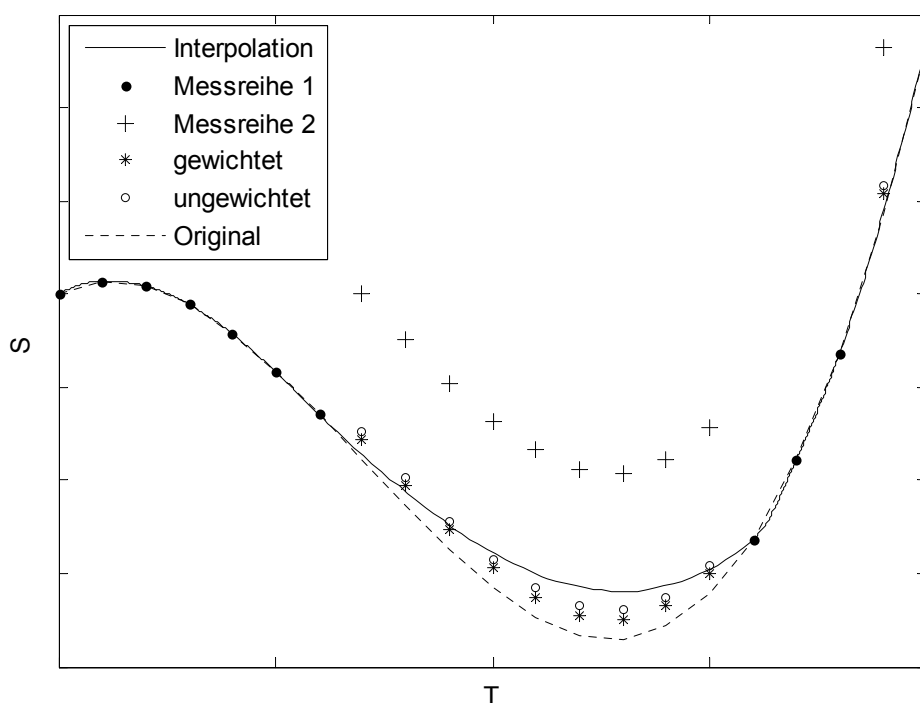


Abbildung 3.10: Vergleich gewichteter und ungewichteter Berechnung beim Einpassen der zweiten Messreihe (Akima-Interpolation)

Die Abbildung 3.10 zeigt, wie sich die Berücksichtigung der Gewichte auswirkt. Hierfür wurden aus einem ein vorgegebenen Polynom zwei Messreihen abgeleitet. In der Graphik ist ersichtlich, dass die Punkte der zweiten Messreihe nach der gewichteten Berechnung näher am originalen Verlauf liegen, als bei einer ungewichteten Berechnung.

Noch deutlicher wird der Vorteil durch die Verwendung der Gewichte bei der linearen Interpolation (Abbildung 3.11). Ohne Berücksichtigung der Steigungen der benachbarten Intervalle liegt der interpolierte Verlauf bei höheren Ordinatenwerten. Die neun Punkte im ersten größeren Intervall schieben die gesamte zweite Messreihe nach oben, der einzelne

Punkt im rechten Bereich hat wenig Einfluss auf das Ergebnis. Mit Verwendung der Gewichte steigt seine Wirkung, da er zum einen in einem kleineren Intervall liegt und zum anderen als einzelner Punkt ein höheres Gewicht p_3 erhält. Dadurch wird die zweite Messreihe bei Berücksichtigung der Gewichte besser eingepasst.

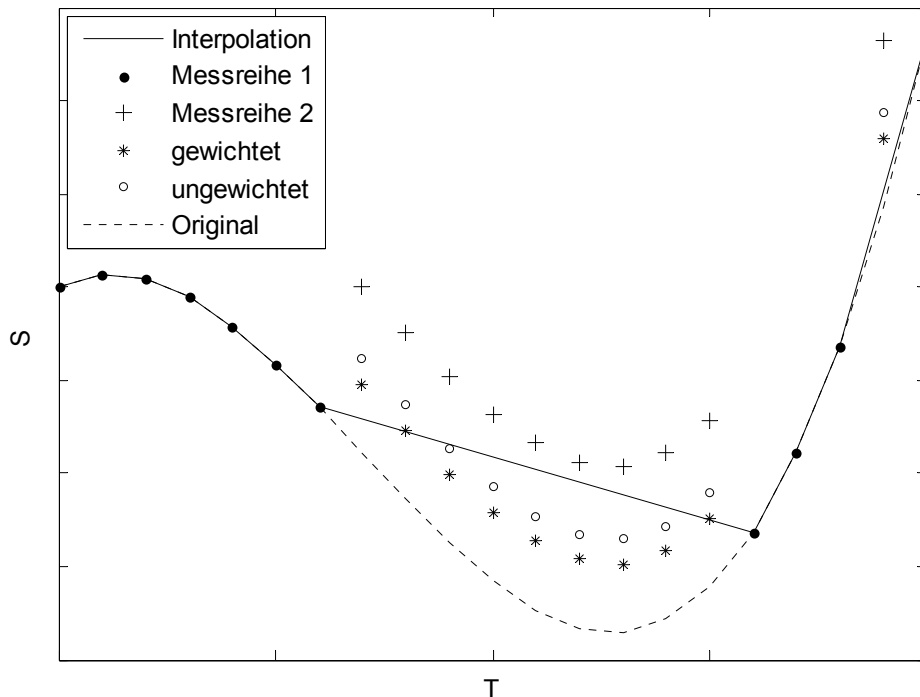


Abbildung 3.11: Vergleich gewichteter und ungewichteter Berechnung beim Einpassen der zweiten Messreihe (lineare Interpolation)

3.2 Einpassen von Testdaten durch Interpolation

Da bei Verwendung realer Messdaten keine Kontrollmöglichkeiten bestehen und es ebenfalls nicht möglich ist, Aussagen zu der Güte des Einpassens und zur Größe der maximal auftretenden Fehler zu treffen, wurden die Interpolation und das Einpassen an Testdatenreihen untersucht. Zu diesem Zweck wurden bekannte Messreihen in zwei Teile zerlegt und diese wieder zusammengefügt. Beide neuen Messreihen haben dabei ihre Funktionswerte beibehalten. Der anschließend berechnete Verschiebungsbetrag v , der im Optimum den Wert 0 annimmt, zeigt somit sofort den Fehler des Einpassens an.

3.2.1 Auswahl der Testdatenreihen

Für die Berechnungen wurden vier Messreihen verwendet (Abbildung 3.12). Die Messreihen gehen auf die Winkelfunktionen zurück. Die Messreihen A und B beschreiben eine viermal aufeinander folgende Sinusfunktion, die Reihen C und D stellen eine halbe Kosinusfunktion

dar. Diese Unterscheidung wurde vorgenommen, um feststellen zu können, wie sich periodische Bewegungen auf der einen Seite und eine einheitliche Bewegungsrichtung auf der anderen Seite auf die Ergebnisse auswirken. Die Amplitude beträgt bei allen Messreihen 1.

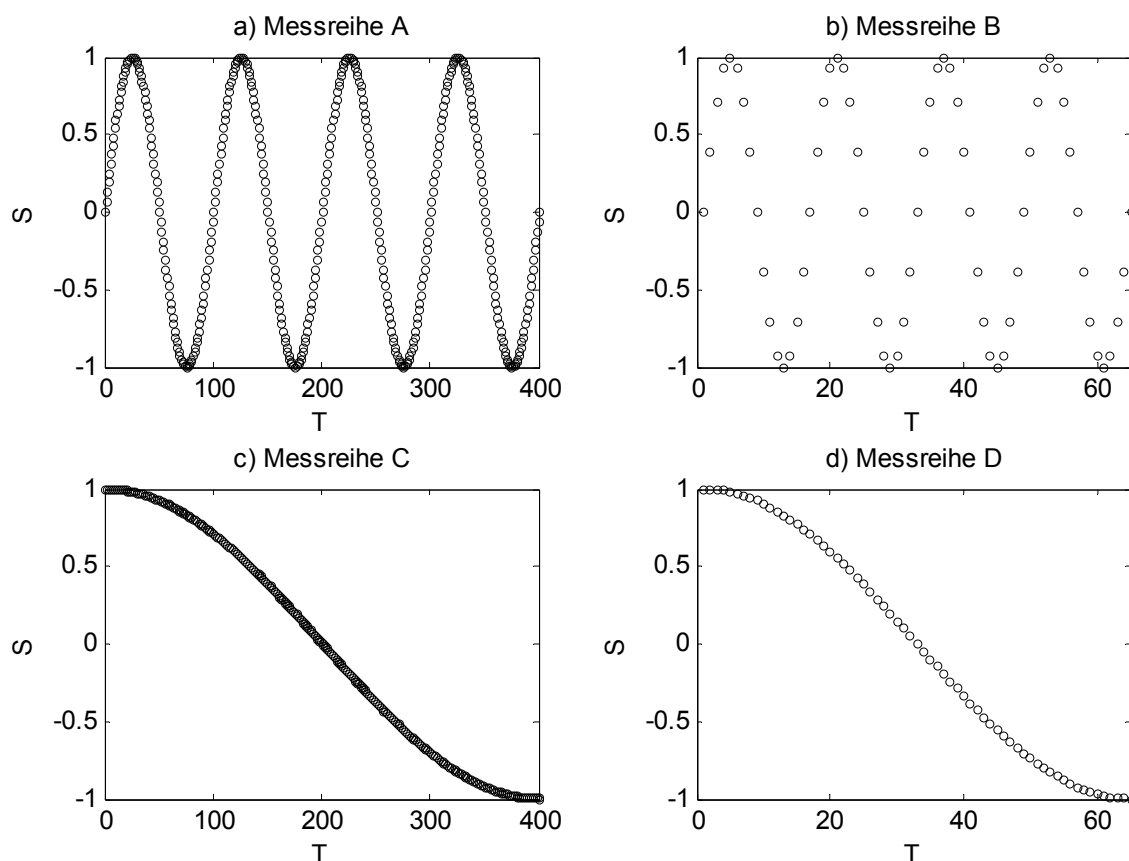


Abbildung 3.12: Messreihen der Untersuchungen

Des Weiteren wurde die Anzahl der Punkte variiert. Die Messreihen A und C bestehen aus 400 Werten, die Reihen B und D aus lediglich 65. Obwohl die Punktzahl der Reihen A und C nicht Messreihen der Nivellements oder der Radarinterferometrie entsprechen, wurde diese Gesamtpunktzahl gewählt, um bei der Zerlegung der Messreihen Extremwerte von 1% und 99% untersuchen zu können. Daneben wurden außerdem 2, 5, 10, 20, 40, 60, 80, 90, 95 und 97 Prozent zufällig ausgewählt und der zweiten Messreihe zugeordnet. Dargestellt wird dieser Wert im Anteil A .

Da Zeitreihen, vor allem die der Radarinterferometrie, durch ein Rauschen überlagert sind, wurde dieses ebenfalls bei den Simulationen berücksichtigt. Den Funktionswerten der Messreihen wurden deshalb zusätzliche Rauschanteile überlagert. Sie haben jeweils den Erwartungswert 0, für die Standardabweichung der Streuung wurden die Werte $R = 0,01, 0,1$ und 1 angenommen. Die Simulationen wurden ebenfalls ohne den zusätzlichen Summanden durchgeführt, um den Einfluss des Rauschens beurteilen zu können. In der nachfolgenden Abbildung ist der unterschiedlich starke Grad der Streuung in Relation zur Amplitude der Messreihe graphisch aufbereitet.

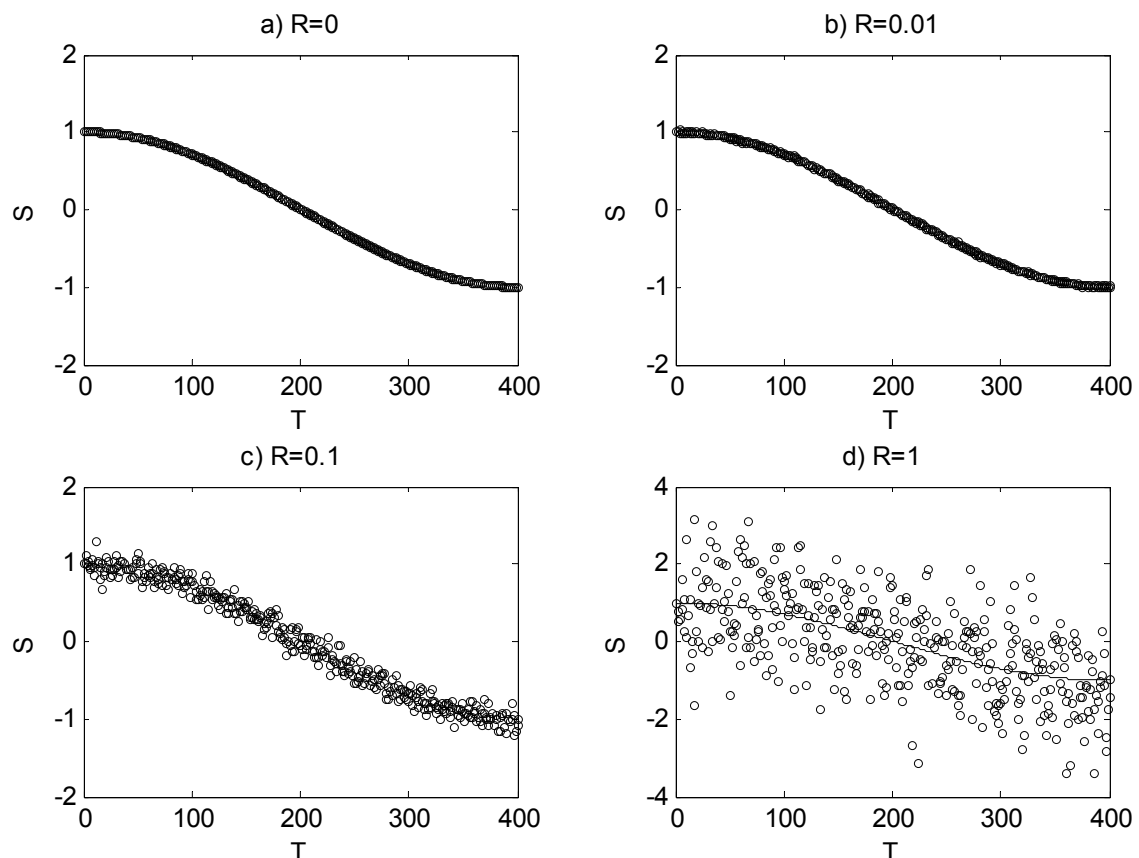


Abbildung 3.13: Messreihe C durch verschiedenstarkes Rauschen überlagert

Um Überlagerungen von Nivellement und Radarinterferometrie oder verschiedener Radarsensoren zu simulieren, wurden die Messreihen 1 und 2 mit verschieden starker Streuung versehen. Dafür werden beide Messreihen gleichermaßen oder jeweils nur eine durch Rauschen überlagert.

Die Zuordnung der Punkte zur ersten oder zweiten Messreihe erfolgte zufällig. Das Rauschen wurde ebenfalls über Zufallsvariablen realisiert. Mit diesen veränderlichen Größen wurden für die Messreihen A bis D, für alle Werte der prozentualen Auswahl A , der unterschiedlich starken Streuung R und beiden Interpolationsarten wurden 5000 Berechnungen durchgeführt und jeweils der Verschiebungsbetrag v bestimmt. Damit lassen sich Angaben über maximale Werte dieser Größe ableiten.

3.2.2 Ergebnis der Interpolation mit den simulierten Messreihen

Unabhängig von der Stärke des überlagernden Rauschens, dem Verlauf der Messreihen und der Gesamtanzahl der Punkte haben die Simulationen gezeigt, dass bis zu einem Anteil von etwa 60% an einzupassenden Punkten die maximale Größe des Einpassungsfehlers abnimmt. Wenn eine große Anzahl an Punkten in eine geringe Anzahl eingepasst wird, nehmen die Werte für v zu (Abbildung 3.14).

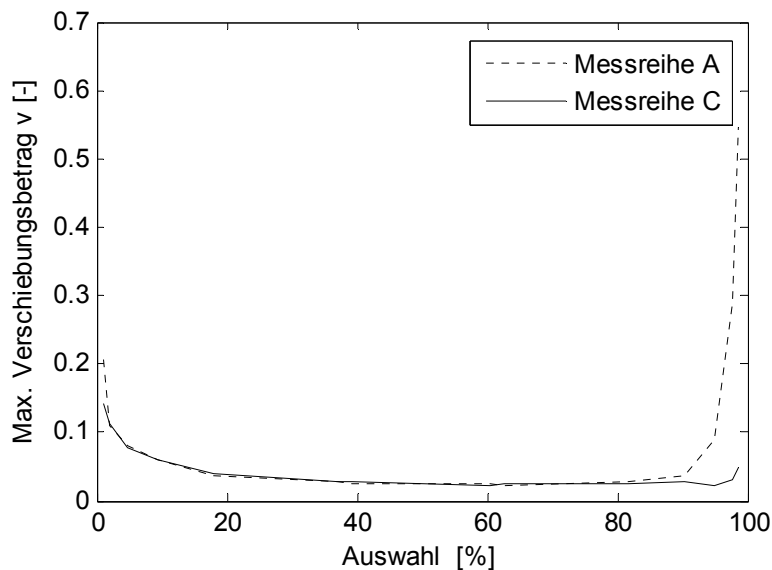


Abbildung 3.14:
 maximaler
 Verschiebungsbetrag
 v ($R=0,1$; zweite
 Messreihe
 verrauscht; Akima-
 Interpolation;
 Verwendung der
 Gewichte)

Für die Verteilungsfunktionen des Messrauschens sind zwar zu Beginn der Berechnungen Werte festgelegt worden, diese gelten jedoch nur für eine größere Anzahl an Beobachtungen. Werden dagegen nur wenige Prozent der Punkte ausgewählt, können der Mittelwert und die Standardabweichung von der Gesamtheit des Messrauschens abweichen. Mit einer größer werdenden Auswahl nähern sich diese Kennwerte den Werten der Grundgesamtheit an und mit der Angleichung des Mittelwertes wird der Verschiebungsbetrag v entsprechend kleiner.

Ab etwa 80% der Punkte in der zweiten Messreihe nimmt der maximal auftretende Verschiebungsbetrag wieder zu, da die verbleibenden Punkte der ersten Messreihe nicht mehr ausreichend sind, um die auftretende Bewegung zu beschreiben. Daher ist das Einpassen bei Messreihe C (siehe Abbildung 3.14) in den Bereichen einer großen Auswahl noch gut möglich, da auch mit wenigen Punkten der einheitlichen Bewegungsverlauf gut dargestellt wird. Eine Rekonstruktion der oszillierenden Bewegung (Messreihe A und B) aus zu wenigen Punkten ist dagegen nicht immer möglich, so dass der Fehler beim Einpassen größer werden kann (Abbildung 3.15).

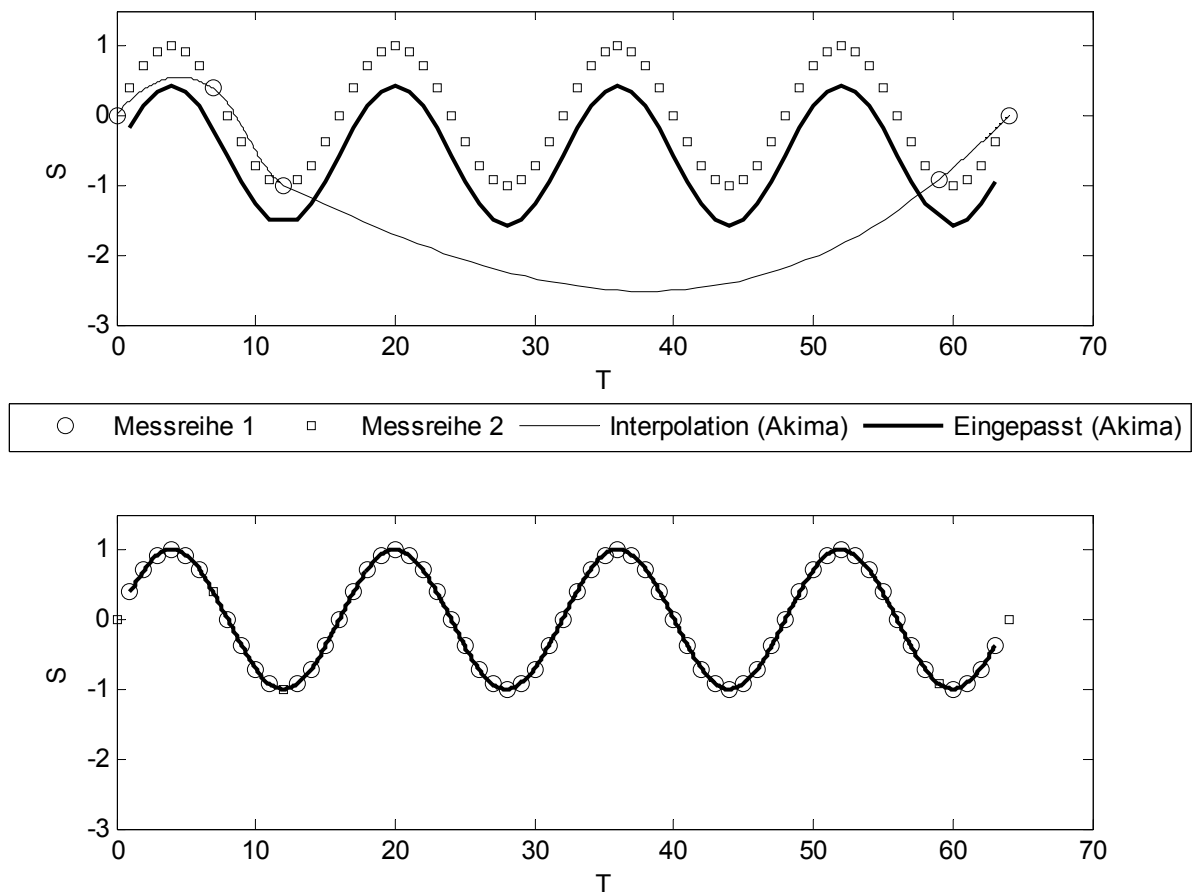


Abbildung 3.15: Vertauschen der ersten und zweiten Messreihe ($R=0$; Akima-Interpolation; Messreihe B)

Unabhängig von den Veränderungen der Eingangsparameter haben die Berechnungen gezeigt, dass die Ergebnisse des Einpassens besser werden, wenn nur bei einer der beiden Messreihe die Werte streuen (Abbildung 3.16). Interpolation unverrauschter Messwerte beschreibt die tatsächliche Bewegung besser, als Interpolation durch verrauschte. Dadurch kann die zweite, durch das Rauschen beeinflusste Messreihe trotzdem sehr gut eingepasst werden. Ist die Messreihe 1 von einem Rauschsignal überlagert, sind die maximalen fehlerhaften Einpassungen im Vergleich mit zwei streuenden Messreihen nur geringfügig besser. Die kleineren maximalen Verschiebungen treten dabei bei einer kleineren Anzahl an einzupassenden Punkten auf. Die größeren Werte der Verschiebung treten auf, wenn mehrere Punkte gemeinsam in einem interpolierten Intervall liegen. Der Verschiebungswert berechnet sich dann aus diesen wenigen Interpolationen. Die Schwankungen in den Messungen können bei der Berechnung von v dann nicht so gut aufgefangen werden, wie bei einer gleichmäßigeren Verteilung der Punkte. Sind beide Messreihen von einem Rauschen überlagert, können die Fehler beim Einpassen der Messreihen größer werden.

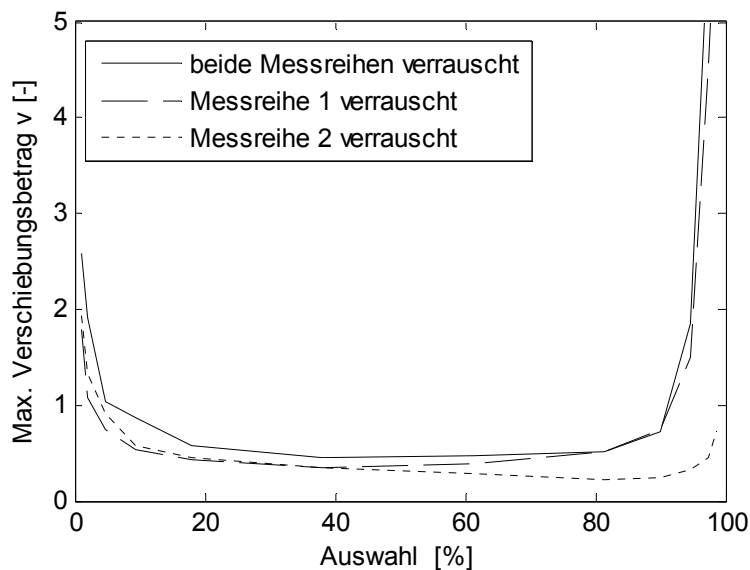


Abbildung 3.16:
maximaler
Verschiebungsbetrag
 v ($R=1$;
Messreihe A; Akima-
Interpolation;
Verwendung der
Gewichte)

Bestehen die zwei zusammenzuführenden Messreihen aus unterschiedlich stark schwankenden Messwerten, ist es sinnvoll die hohe Anzahl verrauschter Werte in die wenigen nicht verrauschten Werte einzupassen. Wie in Abbildung 3.16 ersichtlich, ist der mögliche auftretende Fehler bei einem großen prozentualen Anteil und einer verrauschten einzupassenden Messreihe 2 (--- zwischen 80% und 100 %) kleiner, als im umgedrehten Fall (--- zwischen 0% und 20%).

Auf die Praxis bezogen heißt dies, dass beim Zusammenführen von Nivellement und radar-interferometrischen Höhenänderungen, die Radarmessungen in das Nivellement eingepasst werden.

Die nachfolgende Abbildung 3.17 zeigt abschließend die Unterschiede der verschiedenen Interpolationen am Beispiel der Messreihe B unter Nutzung oder Weglassen der Gewichte. Für diese Graphik wurden die maximalen Verschiebungsbeträge v wiederum gegen das Verhältnis der Anzahl der Punkte beider Messreihen aufgetragen. Für das Rauschen wurde eine Standardabweichung von 0,1 verwendet. Diese Kombination dient lediglich als Beispiel, in anderen Kombinationen der veränderten Eingangsparameter waren die Ergebnisse der Berechnungen ähnlich.

Bei einer kleinen Punktzahl der zweiten Messreihe ($A < 20\%$) zeigen die Berechnungen mit und ohne Gewichten identische Ergebnisse. Dies ist damit zu erklären, dass die einzupassenden Punkte allein in ihrem Intervall liegen, die Intervalle gleich groß sind und die Abstände zu den Punkten der ersten Messreihe ebenfalls gleich sind. Die Gewichte p_1 bis p_3 sind somit identisch. und die Berechnung entspricht einer ungewichteten Einpassung.

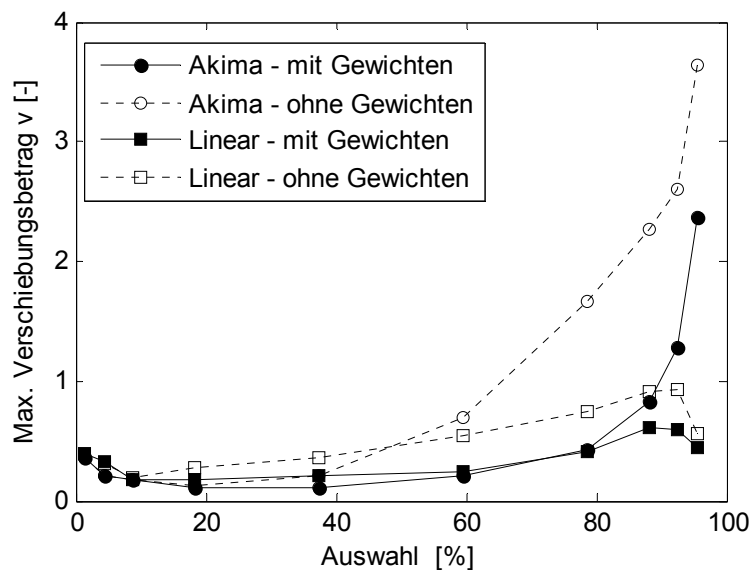


Abbildung 3.17:
maximaler
Verschiebungsbetrag
 v ($R=0,1$;
Messreihe B, zweite
Messreihe
verrauscht)

Ab etwa 40% der Punkte in Messreihe 2 zeigt sich, dass die Einführung der Gewichte, das Ergebnis beim Zusammenführen der Messreihen deutlich verbessert. Die maximal auftretenden Fehler sind mit Gewichten deutlich kleiner als ohne. Ebenfalls ersichtlich ist, dass bei diesem Beispiel bis etwa $A=80\%$ die Akima-Interpolation besser ist, als eine lineare. Bei Messreihen mit wenig bis keiner Streuung in den Messwerten ist dies sogar bei noch höheren Anteilen der zweiten Messreihe der Fall. Werden diese Werte überschritten, kann es unter Umständen sinnvoll sein, die lineare Interpolation zu verwenden. Daneben kann es zweckmäßig sein auf die Verwendung der Gewichte zu verzichten. In welchen Konstellationen eine lineare Interpolation oder der Verzicht auf Gewichte sinnvoll ist, wird in den folgenden Kapiteln aufgezeigt.

Entscheidung Akima-Interpolation oder lineare Interpolation

Zu Beginn der Berechnung muss entschieden werden, welche Art der Interpolation genutzt werden soll. Hierbei ist zum einen die Anzahl der Punkte für die Interpolation ausschlaggebend. Für eine Akima-Interpolation sind mindestens vier Punkte notwendig, um sie sinnvoll anwenden zu können [Gleichung (3-10) bis (3-13)], auch wenn theoretisch auf Grund der Rechenvorschriften eine Berechnung mit nur drei Punkten möglich ist. Aus diesen drei Punkten werden über Berechnung einer Parabel und durch Extrapolation je zwei neue Punkte vor und nach den Messungen festgelegt, um die Interpolation überhaupt zu ermöglichen. Eine Interpolation nach Akima beruht in diesem Fall eher auf einer Extrapolation und sollte nicht angewendet werden.

Ein weiteres Kriterium zur Wahl der Interpolationsart ist der Überdeckungsbereich beider Messreihen. In der nachfolgenden Graphik ist ein solches Beispiel dargestellt. Die Messreihen überschneiden sich lediglich im letzten Intervall. Auch hier wird der Verlauf der Akima-Interpolation aus den letzten drei Punkten und den zwei zusätzlichen bestimmt. Die Interpolation und der Verschiebungsbetrag v beruhen somit auf der Extrapolation der Zeitreihe. In diesem Fall ist es ebenso empfehlenswert, die lineare Interpolation zu verwenden.

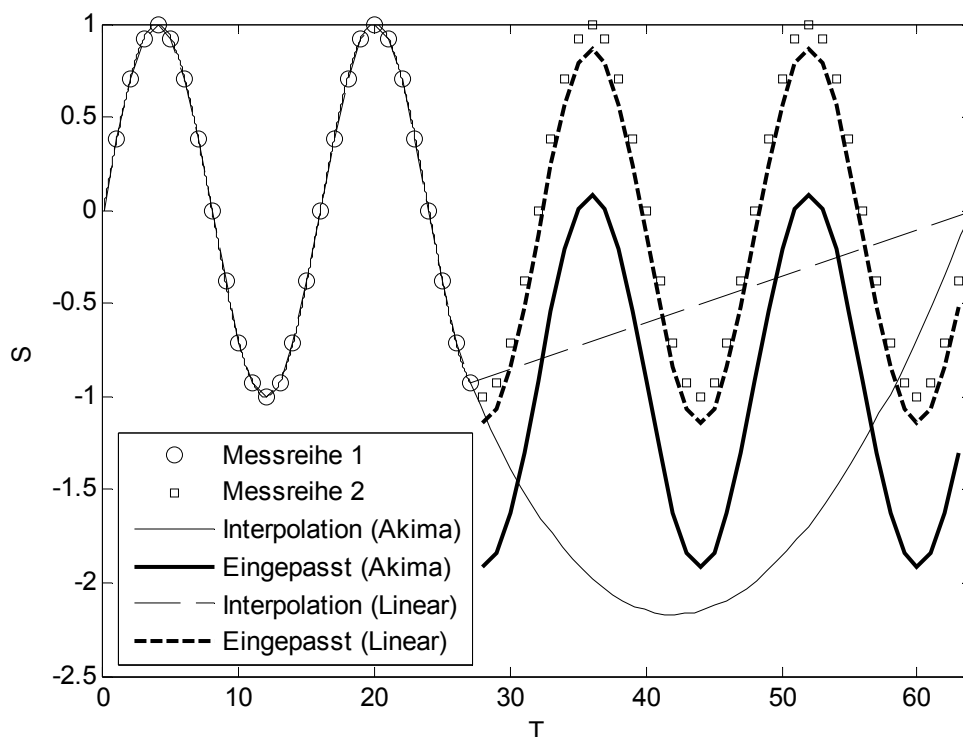


Abbildung 3.18: Überlappung der Messreihen in den Randbereichen (Messreihe B)

Entscheidung gewichtet oder ungewichtet

Trotz der beschriebenen Vorteile der Akima-Interpolation und der Verwendung der Gewichte kann neben der linearen Interpolation aber auch ein Verzicht auf die Gewichte zweckmäßig sein. Dies ist dann der Fall, wenn die Gewichte für die Messwerte der zweiten Reihe sehr ungleichmäßig vergeben werden und die Streuung für die dann stark gewichteten Messwerte eine Tendenz aufweist. Ein solches Beispiel ist in Abbildung 3.19 dargestellt.

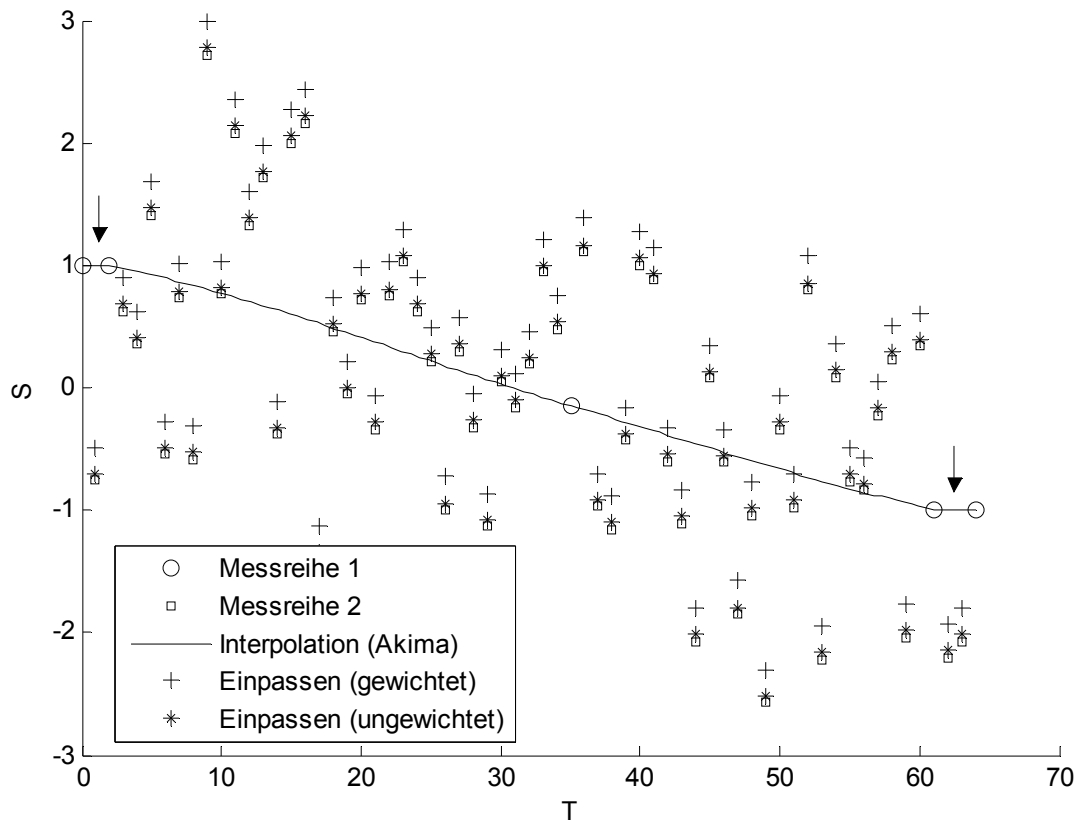


Abbildung 3.19: gewichtetes und ungewichtetes Einpassen ($R=1$; Messreihe D; Akima-Interpolation)

Das erste und das letzte Intervall (\downarrow) sind im Vergleich zu den beiden mittleren extrem kurz. Damit ergibt sich für p_1 bezogen auf die Länge der Intervalls ein hohes Gewicht. Da bei den simulierten Messreihen die Punkte gleichmäßig verteilt sind, sind in kleinen Intervallen nur wenige Punkte enthalten. Das sich daraus ergebende p_3 verstärkt den Effekt. Die Punkte der zweiten Messreihe in diesen beiden Intervallen liegen unterhalb des idealen Verlaufs. Durch die hohen Gewichte und den gleichen Trend beim Rauschen verschieben diese drei Punkte die zweite Messreihe zu höheren Ordinatenwerten. Ein Einpassen ohne Gewichte verursacht eine solche ungewollte Verschiebung nicht. Deshalb muss beim Verknüpfen zweier Messreihen beachtet werden, ob durch eine unterschiedliche Anzahl von Punkten oder unterschiedlich große Intervalle stark variierende Gewichte auftreten, indem das maximale Gewicht mit Mittelwert und Median aller verglichen werden.

Die Simulation der Messreihen mit verschiedenen Eingangsparametern hat gezeigt, dass bei unterschiedlich stark streuenden Messwerten immer in die Messreihe mit den weniger verrauschten Messwerten eingepasst werden sollte. Streuen die Messwerte beider Reihen etwa gleich stark, wird die Messreihe mit der geringeren Anzahl an Werten, in die mit der höheren Zahl eingesetzt. Zeigen die Messreihen eine einheitliche Bewegungsrichtung sind die Ergebnisse besser, als bei stark schwankenden Messreihen. Tritt ein starkes Rauschen auf, sind die Ergebnisse mit unterschiedlichen Interpolationen etwa gleich.

Vor dem Zusammenführen der beiden Messreihen muss überprüft werden, ob sich der gemeinsame Bereich nur auf ein Intervall im Randbereichen beschränkt, da dann die lineare Interpolation vorgezogen werden sollte. Liegt ein größerer Überlappungsbereich vor und sind die Messungen nicht von einer starken Streuung überlagert, zeigt die Akima-Interpolation die besseren Ergebnisse. Die Lage der Messungen zueinander wird durch das erstellte Programm festgestellt und eine Empfehlung ausgesprochen. Daneben wird untersucht, ob einige wenige Punkte überdurchschnittlich große Gewichte aufweisen, wodurch die Lage der eingepassten Messreihe stark beeinflusst werden kann. In diesen Fällen wird ein Verzicht auf die Gewichte empfohlen.

Analog können so auch drei oder mehr Messreihen miteinander verbunden werden. Hierbei sollte sofern möglich immer in die am wenigsten streuende Messreihe eingepasst werden.

3.3 Beispiele der Interpolation mit den realen Messreihen

Im ersten Beispiel werden nivellierte Höhen mit Höhenänderungen verknüpft, die durch PSI-Auswertungen gewonnen wurden. In Analogie zu den obigen Betrachtungen ist das Nivellement nicht von einem Rauschsignal überlagert, die Zeitreihe der Höhenänderungen der Radarmessungen dagegen schon. Der Übersichtlichkeit wegen und für eine leichtere Zuordnung wurden die Messwerte der beiden Reihen in Abbildung 3.20 linear verbunden.

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, ist es sinnvoll die Interpolation auf die nicht oder wenig verrauschten Daten anzuwenden und die stark verrauschten Daten einzupassen. Die Höhenänderungen der Radarauswertungen werden deshalb in die nivellierten Höhen eingepasst. Für eine umgekehrte Zuweisung der beiden Messreihen ist die zeitliche Überlappung der beiden Reihen ohnehin zu klein. Der Verschiebungsbetrag v könnte aus lediglich 2 Punkten abgeleitet werden.

Bei diesem Beispiel erfolgt die Einpassung über die letzten beiden Intervalle der ersten Messreihe. Daher wird wie oben beschrieben in diesem Fall die lineare Interpolation verwendet.

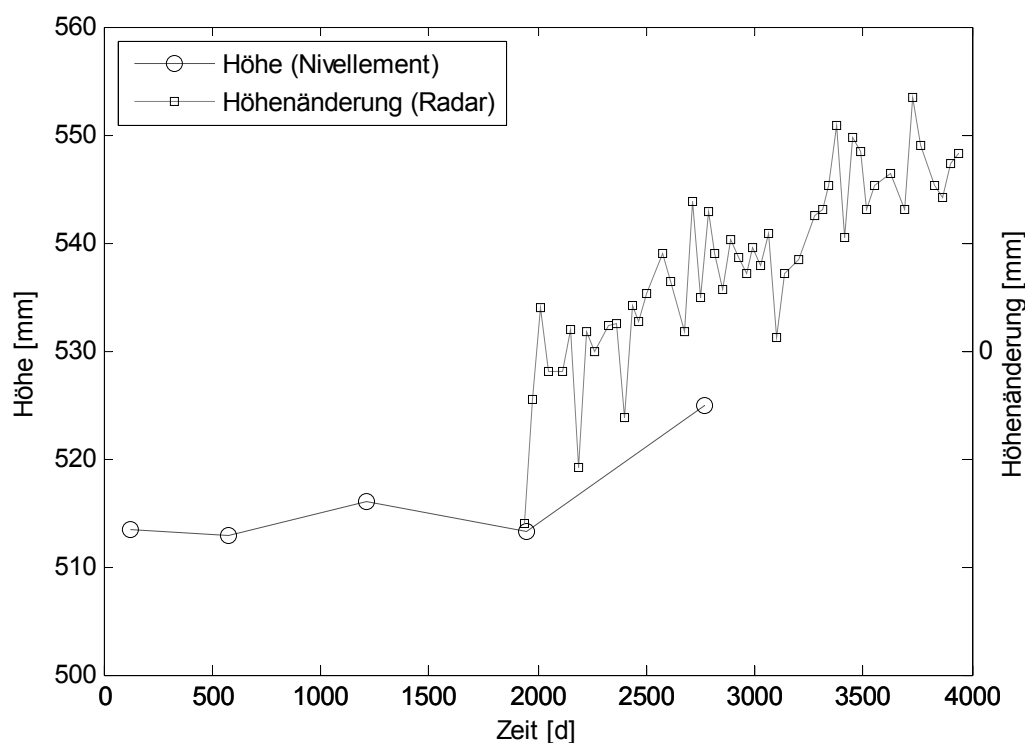
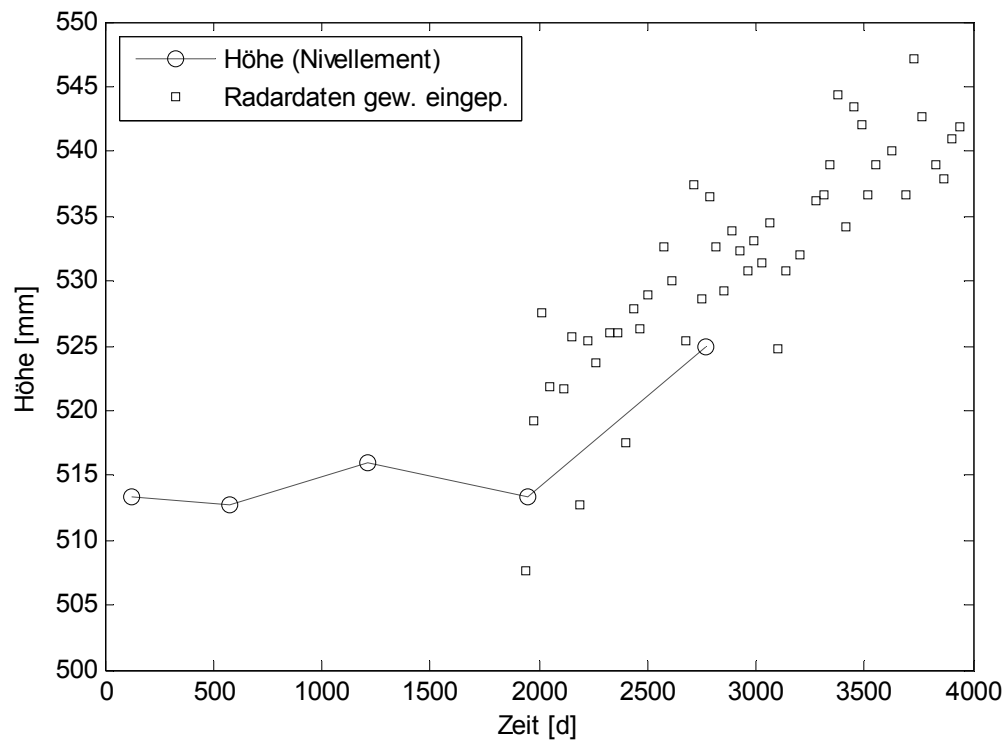
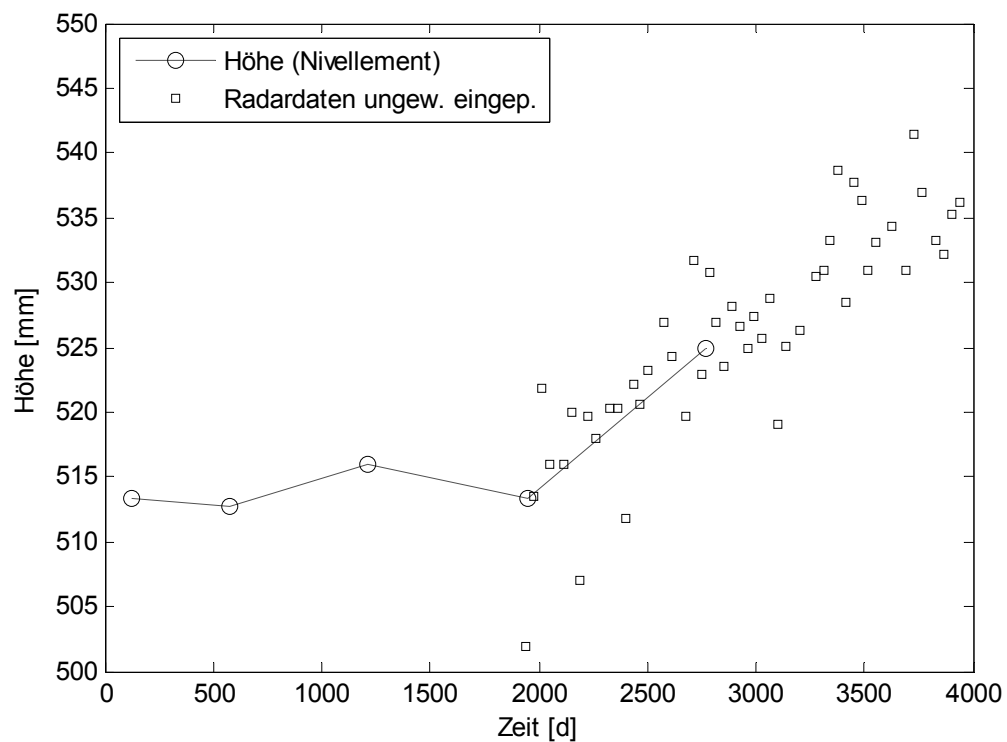


Abbildung 3.20: Zeit-Höhenänderungsdiagramm des Beispiels 1 (Nivellement und Envisat)

Die Abbildung zeigt ebenfalls, dass nur der erste Punkt der zweiten Messreihe im vorletzten Intervall der ersten Zeitreihe liegt. Dadurch wird das dritte Gewicht für diesen Punkt im Vergleich zu den anderen, die gemeinsam in einem Intervall liegen, vergleichsweise groß. Das zweite Gewicht, bezogen auf den Abstand zum nächstliegenden Punkt, ist für diesen Punkt der Radarmessreihe durch das zeitnahe Nivellement, nur drei Tage später, ebenfalls größer als bei den anderen Werten dieser Reihe. Da das erste Gewicht für den Punkt in diesem Beispiel ebenfalls einen größeren Wert annimmt als die folgenden Messwerte, bestimmt dieser Punkt maßgeblich das Einpassen der zweiten Reihe unter Verwendung von Gewichten. Da es sich bei diesem Wert allerdings um einen Ausreißer in der Zeitreihe der Radarauswertung handelt, ist der Einfluss nicht gewollt. Die nachfolgenden Graphen zeigen den Unterschied zwischen dem Zusammenführen mit und ohne Verwendung der Gewichte. Der große Einfluss des ersten Punktes ist in der unterschiedlichen Lage der beiden eingepassten Messreihen deutlich erkennbar. Wie im vorherigen Kapitel festgestellt, ist es unter solchen Umständen mitunter sinnvoll, auf die Verwendung der Gewichte zu verzichten.



a)



b)

Abbildung 3.21: Zusammengeführte Messreihen des Beispiels 1 mit (a) und ohne (b) Berücksichtigung der Gewichte

Berechnungen dieses Beispiels nach Ausschluss des ersten Punktes zeigen nur kleine Unterschiede in den Ergebnissen bei einer Berechnung mit und ohne Benutzung der Gewichte. Da in diesem Fall kein Punkt in der Messreihe enthalten ist, dessen Gewicht sich von den Gewichten der anderen Punkte deutlich unterscheidet, haben alle Punkte einen ähnlichen Einfluss auf die Berechnung des Verschiebungsbetrages v . Die so erhaltenen Werte unterscheiden sich ebenfalls wenig vom Verschiebungswert, der sich aus der ungewichteten Berechnung bei der Verwendung aller Punkte ergibt.

Im zweiten Beispiel werden PSI-Auswertungen zweier unterschiedlicher Satelliten benutzt. Die Messung mit TerraSAR-X wurde der ersten Messreihe zugewiesen. In diese wird eine Messung mit Envisat eingepasst (Abbildung 3.22).

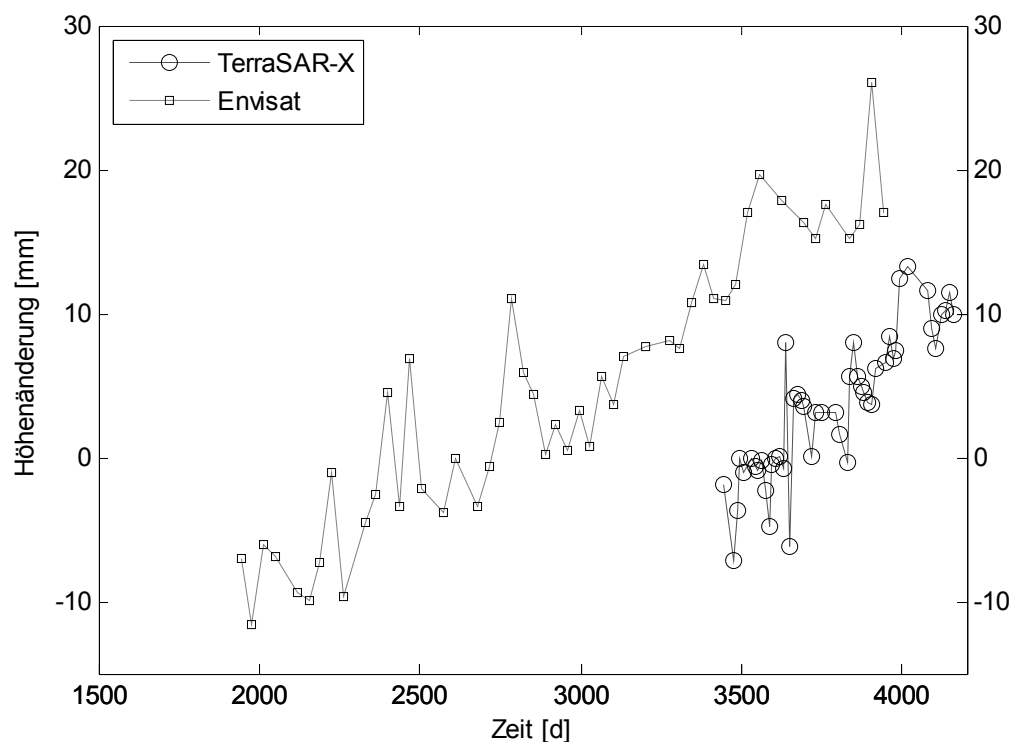


Abbildung 3.22: Zeit-Höhenänderungsdiagramm des Beispiels 2 (Envisat und TerraSAR-X)

Die Zuweisung der Messreihen erfolgte in diesem Beispiel ebenfalls aufgrund der unterschiedlich starken Streuung. Da in diesem Beispiel die Überdeckung der beiden Messreihen größer ist und mehrere Intervalle überspannt, wird die Akima-Interpolation eingesetzt. Eine Berechnung mit linearer Interpolation ergibt aufgrund der starken Streuung der Messwerte ein ähnliches Ergebnis. Da es in dieser Konstellation bei der Zuweisung der Gewichte zu keinen überdurchschnittlich großen Werten kommt, finden diese ebenfalls Anwendung. Das Ergebnis der zusammengeführten Messungen ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.

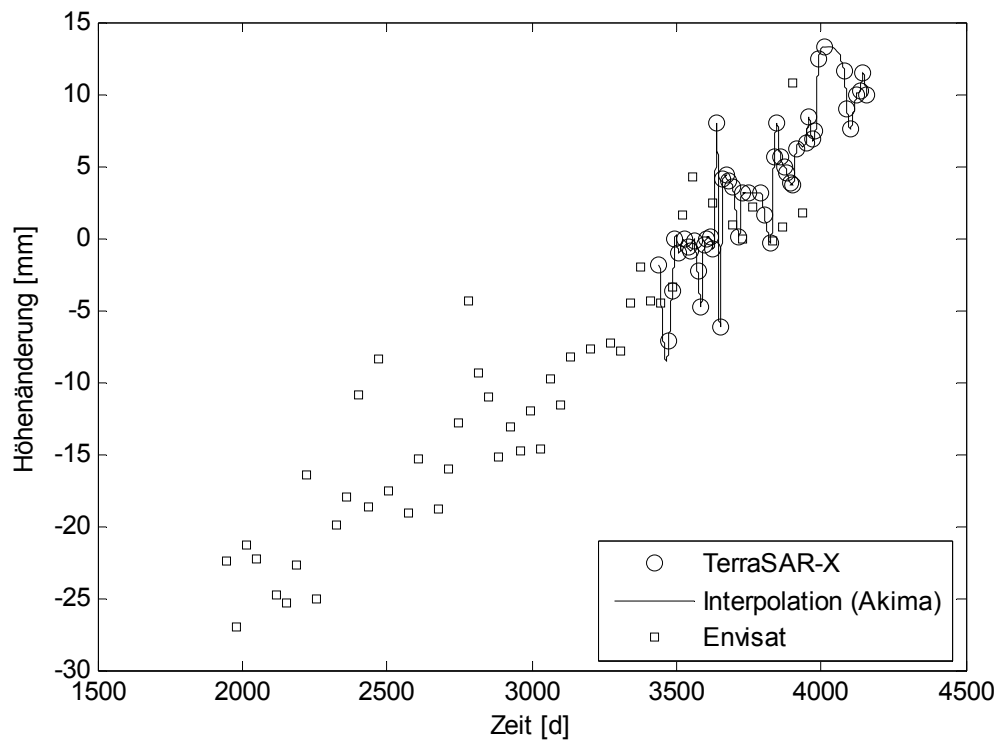


Abbildung 3.23: Zusammengeführte Messreihen des Beispiels 2

Im dritten Beispiel werden zwei Messreihen eines Satelliten, aber mit unterschiedlicher Aufnahme­richtung (Descending, Ascending) kombiniert. Die zeitlichen Abstände zwischen den Messungen sind deshalb in beiden Zeitreihen identisch, sofern alle durchgeführten Messungen für die Auswertung zur Verfügung standen. Wie in Abbildung 3.24 erkennbar tritt lediglich ab Tag 4000 eine größere zeitliche Lücke in den Messungen auf. Aufgrund der gleichmäßigen Satellitenbewegung sind die Abstände der beiden Aufnahmen ebenfalls gleich groß und die Aufnahmen erfolgen immer abwechselnd. Daher unterscheiden sich die Gewichte der einzelnen Messungen nur wenig und somit die Ergebnisse zwischen gewichteter und ungewichteter Berechnung ebenfalls kaum. Da bei beiden Messreihen die Werte gleich stark streuen, kann die Zuordnung zur ersten und zweiten Messreihe beliebig erfolgen.

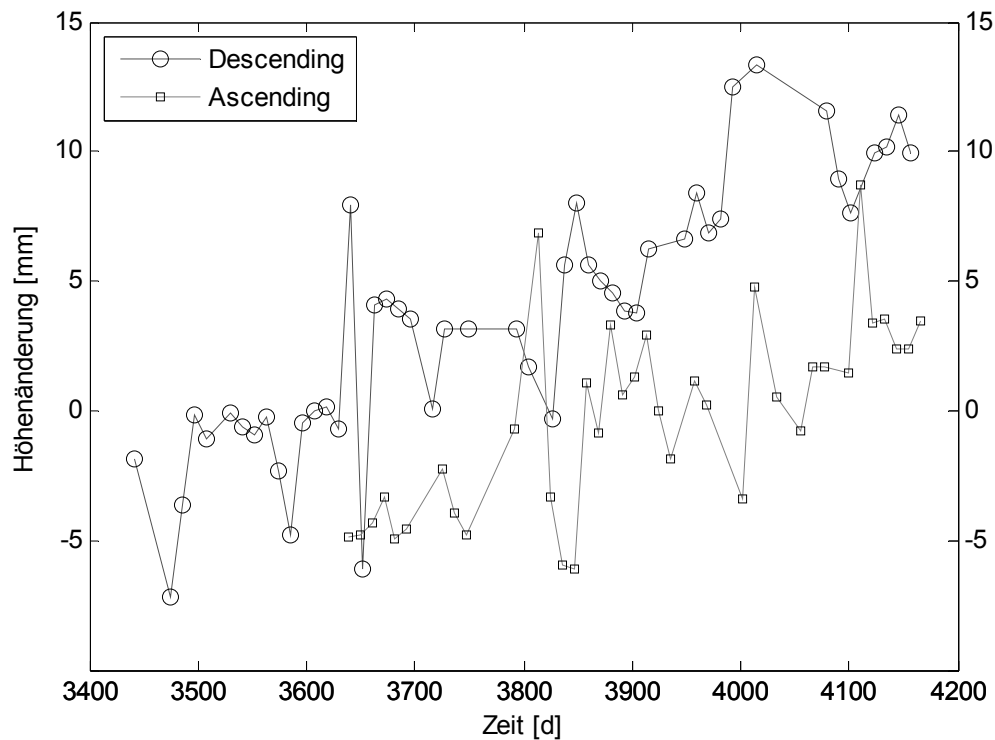


Abbildung 3.24: Zeit-Höhenänderungsdiagramm des Beispiels 3 (unterschiedliche Blickrichtung des Satelliten)

Für dieses Beispiel wurden alle acht Kombinationen der zu interpolierenden Messreihen, der Art der Interpolation und die Verwendung der Gewichte berechnet. Die Ergebnisse unterscheiden sich bei dieser Konstellation nur unwesentlich. Für die nachfolgende Abbildung wurde die Reihe des Descending als Reihe 1 definiert, als Interpolation Akima gewählt und die Gewichte berücksichtigt.

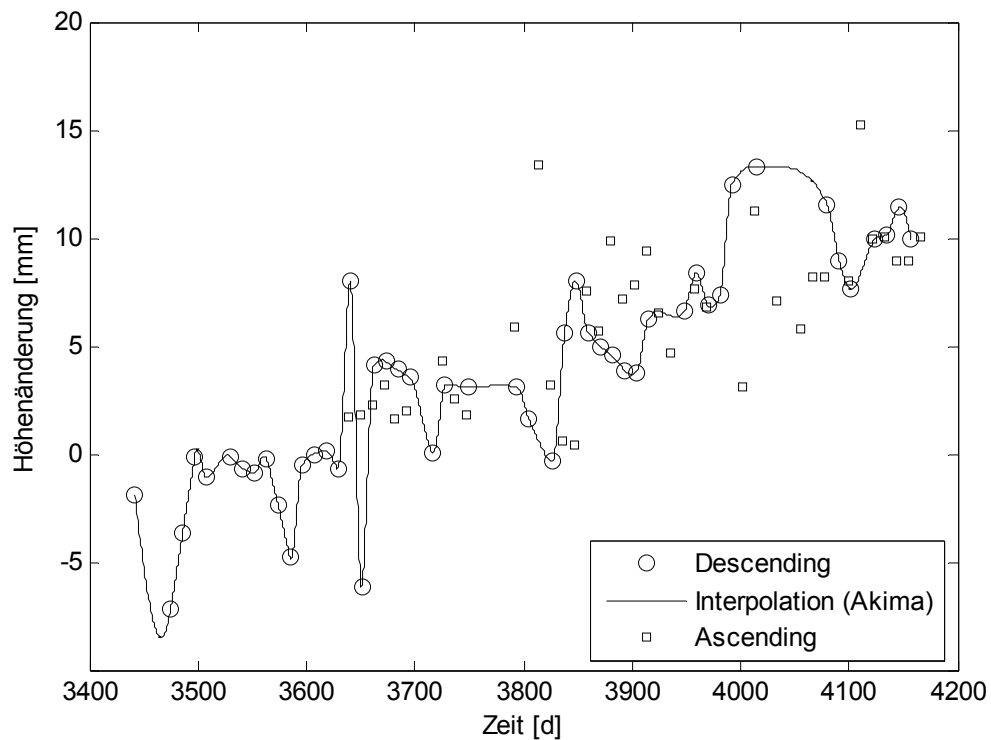


Abbildung 3.25: Zusammengeführte Messreihen des Beispiels 3

Alle hier vorgestellten Beispiele zeigen, dass bei einer sorgfältigen Zuweisung zur interpolierenden und zur einzupassenden Zeitreihe, der Wahl der Art der Interpolation und der Zuweisung von Gewichten rekonstruierbare Ergebnisse beim Verbinden zweier Messreihen erzielt werden.

Diese Methoden zur Kombination können neben der hier vorgestellten Interpolation natürlich ebenfalls für approximierten Verläufe zwischen Messpunkten eingesetzt werden. Hierbei können die Abstände zur gewählten Funktion analog berechnet und aus diesen die Verschiebung v abgeleitet werden.

3.4 Diskussion der Ergebnisse

Nachdem die unterschiedlichen Messreihen zusammengefügt wurden, werden sie für die abschließenden Betrachtungen als eine gemeinsame behandelt. Durch diese neuen Messreihen wurden approximierende Polynome gelegt, wobei der Grad dieser über eine Berechnung orthogonaler Polynome festgestellt wurde. Anschließend wurde für die einzelnen Messreihen die Standardabweichung aus den Abweichungen zu dieser Funktion bestimmt. Mit diesen Werten konnte die Festlegung von interpolierender und einzupassender Messreihe in den ersten beiden Beispielen bestätigt werden. Sowohl beim Nivellement als auch bei den TerraSAR-X-Daten weisen diese im Vergleich mit den Envisat-Messungen eine kleinere Standardabweichung auf (Tabelle 3.1). Diese Werte entsprechen zwar nicht einer Messgenauigkeit, sondern beruhen auf der Anpassung an das Polynom, sie geben aber dennoch guten Aufschluss über die Streuung der einzelnen Messverfahren.

Tabelle 3.1: Standardabweichung der Gewichtseinheit zum approximierenden Polynom

	Standardabweichung für die erste Messreihe [mm]	Standardabweichung für die zweite Messreihe [mm]
Beispiel 1	2,4 (Nivellement)	4,6 (Envisat)
Beispiel 2	2,5 (TerraSAR-X)	3,4 (Envisat)
Beispiel 3	2,7 (TerraSAR-X)	2,6 (TerraSAR-X)

In der nachfolgenden Abbildung ist die gemeinsame Messreihe des ersten Beispiels dargestellt. Zusätzlich sind die Residuen getrennt nach beiden Messverfahren aufgetragen. Über den gesamten Verlauf beider Messreihen ist kein Trend zu erkennen, stattdessen verändern sich die Abstände zum Polynom in Betrag und Vorzeichen unregelmäßig. Daher war die Festlegung richtig, die lineare Interpolation zu verwenden und die Gewichte nicht zu berücksichtigen.

Bei einer Vereinigung mit Berücksichtigung der Gewichte [vergleiche Abbildung 3.21 a)] verläuft das Polynom oberhalb des hier dargestellten. Die Abstände der nivellierten Höhen zu dieser Kurve zeigen dann eine fallende Tendenz. Die Entscheidung auf den Verzicht der Gewichte ist somit noch einmal bestätigt.

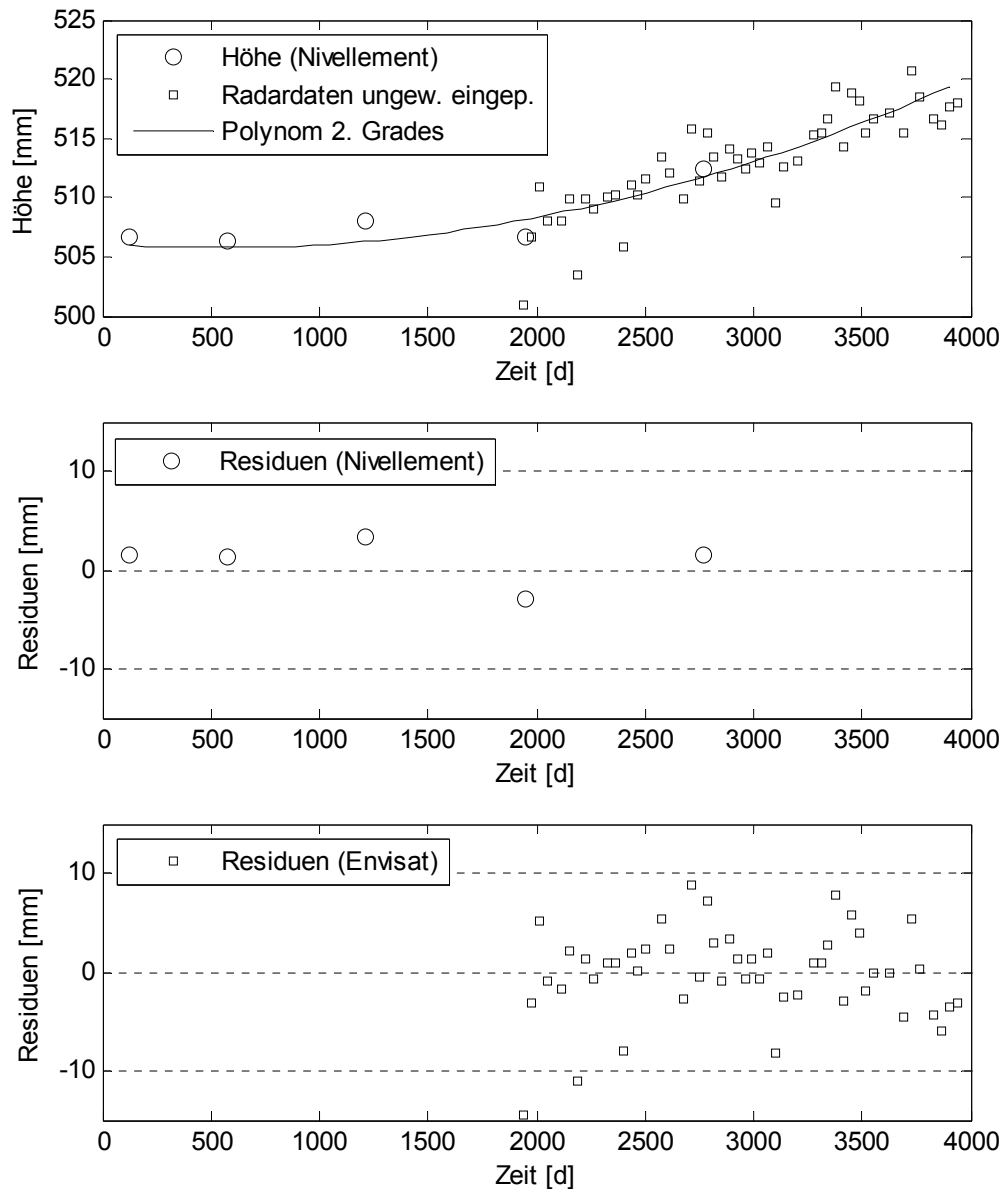


Abbildung 3.26: Polynomiale Anpassung und Residuen des Beispiels 1

Im dritten Beispiel wurden zwei Messreihen zusammengeführt die vom selben Satelliten, allerdings aus unterschiedlicher Richtung aufgenommen wurden. Die Standardabweichungen in der Tabelle 3.1 zeigen, dass es keine Unterschiede in der Genauigkeit in Bezug auf die ausgleichende Gerade gibt.

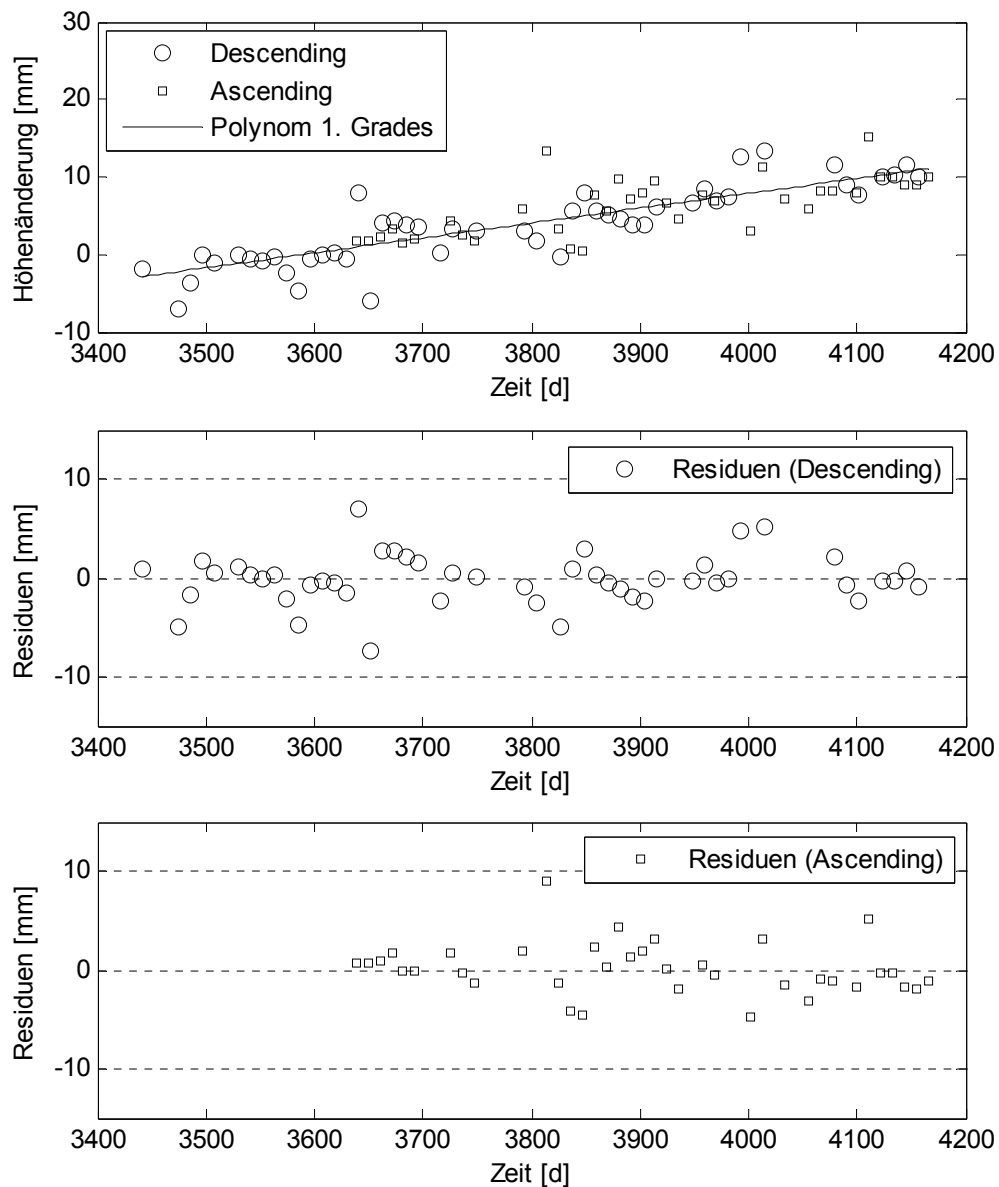


Abbildung 3.27: Polynomiale Anpassung und Residuen des Beispiels 3

Die in Abbildung 3.27 dargestellten Residuen zeigen auch für dieses Beispiel, dass die erzeugte gemeinsame Messreihe als Einheit betrachtet werden kann. Die Abstände zu der Geraden zeigen keine Tendenz, sondern schwanken um den Wert 0. Dieses Beispiel zeigt außerdem, dass die zwei Aufnahmerichtungen eines Satelliten gleichwertig verwendet werden können, um eine auftretende Bewegung adäquat zu beschreiben.

4 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt Möglichkeiten zur Kombination von Messungen unterschiedlicher Sensoren. Dies können Zeitreihen der Radarinterferometrie und des Nivellements, aber auch Messungen verschiedener Satellitensensoren sein. Anwendung findet dies beispielsweise in Bereichen des aktiven oder stillgelegten Bergbaus. Die notwendigen Überwachungsmessungen finden bisher in Form von Präzisionsnivellements statt. Diese sind üblicherweise nur an linienhaften Objekten der Infrastruktur. In den vergangenen Jahren finden die Methoden der Radarinterferometrie immer mehr Anwendung. Damit können flächenhafte Aussagen über Höhenänderungen an der Tagesoberfläche gewonnen werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind zwei Programmpakete entwickelt worden, die eine Kombination der grundverschiedenen Messverfahren ermöglichen. Für beide Programme ist es erforderlich, dass die untersuchten Punkte dieselben Bewegungen ausführen. Im besten Fall sind die Messpunkte identisch. Die unterschiedliche Anwendbarkeit der Programmpakete ergibt sich aus den Zeitpunkten der Messungen.

Im ersten Fall müssen die Messungen zeitgleich oder nahezu zeitgleich stattfinden. Dann ist eine gemeinsame Ausgleichung möglich. Die beim Nivellement gemessenen Höhenunterschiede zu einem Zeitpunkt und die durch Radarinterferometrie gemessenen Höhenänderungen an einem Punkt spannen ein Netz in Raum und Zeit auf. Die Programme bieten dafür die Möglichkeit vor einer Auswertung nach vom Anschlusspunkt unabhängigen Punkten zu suchen. Die alleinige Auswertung der radarinterferometrischen Beobachtungen hat gezeigt, dass eine Einführung von Gewichten in Abhängigkeit von der Basislinie sinnvoll ist. Messungen mit sehr großen räumlichen Basislinien fallen durch die Suche nach groben Fehlern nach dem Prinzip der normierten Verbesserung ohnehin heraus. Sie können aber helfen, Konfigurationsdefekte zu vermeiden, ohne einen großen Einfluss auf die ausgeglichenen Höhen zu haben. Atmosphärische Störungen können über die Ausgleichung nicht aufgedeckt werden, da sie in entsprechenden Höhenänderungen auftreten. Das entwickelte Programm liefert aber die Möglichkeit nach einer graphischen Ausgabe alle Beobachtungen zu eliminieren, die mit einem solchen Ausreißer verknüpft sind.

Durch die gemeinsame Ausgleichung von nivellierten und radarinterferometrisch bestimmten Höhendifferenzen können über eine Varianzkomponentenschätzung die Genauigkeiten der Beobachtungsgruppen zueinander bestimmt werden. In dieser iterativen Berechnung verschieben sich die Gewichte derart, dass das Nivellement fast vollständig in der Berechnung verbleibt, während die Radardaten herausgenommen werden. Der Genauigkeitsgewinn bei den Radardaten durch die Ausgleichung ist damit erheblich größer als bei den nivellierten Beobachtungen. Die Höhen an den gemeinsamen Punkten beider Messverfahren zeigen die größten Genauigkeiten, die kleinsten treten netzwerkbedingt an Punkten auf, die nur nivelliert werden konnten. Daneben bieten die Programme zur gemeinsamen Ausgleichung die Möglichkeit Phasensprünge in der Radarauswertung zu finden und zu korrigieren.

Für das zweite Programmpaket sind gleiche Zeitpunkte für die Messungen nicht erforderlich, aber die Zeiträume der Messungen müssen sich überlappen. Über die Interpolation einer Zeitreihe wird ein Verschiebungsbetrag für die zweite Zeitreihe bestimmt. Für diese Berechnungen wurde die Akima-Interpolation gewählt. Bei dieser handelt es sich um aneinander gereihte Polynome dritten Grades, die den Verlauf in benachbarten Intervallen berücksichtigen, aber nicht so sehr schwingen, wie herkömmliche Splines. Der Verschiebungsbetrag wird als gewichtetes arithmetisches Mittel der Abstände zu dieser Interpolation bestimmt. Die Gewichte beziehen sich dabei auf die Lage und die Verteilung der Messpunkte der beiden Zeitreihen. Die Kenntnis über ein Bewegungsmodell ist hierfür nicht notwendig.

Zur Ermittlung einer Strategie, unter welchen Bedingungen die zu interpolierende und die einzupassende Messreihe zugeordnet wird, wurden Simulationen durchgeführt. Bei diesen wurden verschiedene Verläufe der Bewegung mit einer unterschiedlichen Gesamtanzahl an Messpunkten untersucht. Diese Messpunkte wurden mit diversen prozentualen Anteilen den beiden Messreihen zugeordnet. Zusätzlich wurden beide Messreihen oder je nur eine mit einem Messrauschen überlagert. Bei diesem wurde zusätzlich die Größe der Streuung variiert. Alle Variationen von Eingangsparametern wurden sowohl für die lineare als auch für die Akima-Interpolation durchgeführt.

Diese Simulationen haben ergeben, dass bei unterschiedlich stark streuenden Zeitreihen immer die Reihe interpoliert werden sollte, bei der die Werte weniger stark verrauscht sind. Ist das Rauschen etwa gleich stark ausgeprägt, wird wiederum die Reihe mit der größeren Anzahl an Punkten interpoliert. Vor dem Zusammenführen der beiden Messreihen prüft die entwickelte Software, ob sich der überlappende Bereich über mehrere zu interpolierende Intervalle erstreckt oder nur ein Randintervall umfasst, da in diesem Fall die lineare Interpolation bessere Ergebnisse liefert. Daneben wird geprüft, ob einigen wenigen Punkten der einzupassenden Messreihe ein überdurchschnittlich großes Gewicht zugewiesen wird. In diesen Fällen wird empfohlen, auf die Verwendung der Gewichte zu verzichten, da dies zu nicht sinnvollen Ergebnissen führen kann. Daneben haben die Simulationen gezeigt, dass bei einer einheitlichen Bewegungsrichtung, die Ergebnisse des Einpassens besser sind. Bei geringer Streuung der Messwerte zeigt die Akima-Interpolation die besseren Resultate, bei starkem Rauschen sind die Ergebnisse beider Interpolationen gleich.

Die Ergebnisse der Simulationen und die Empfehlungen zur Wahl der Art der Interpolation und zur Verwendung der Gewichte konnte mit realen Messdaten bestätigt werden. Nach dem Zusammenfügen zu einer Messreihe wurde durch diese ein approximierendes Polynom gelegt. Mit der Auswertung der Standardabweichungen der einzelnen Messungen zu dieser Funktion konnte die Festlegung der zu interpolierenden und der einzupassenden Messreihe der realen Messdaten bestätigt werden. Über die Residuen wurde gezeigt, dass die neuen Zeitreihen für nachfolgende Auswertungen als eine einzelne behandelt werden kann.

Nicht abgedeckt wird in dieser Arbeit der Fall, dass die Messungen mit unterschiedlichen Sensoren nacheinander stattfinden. Für diesen Fall ist zusätzlich ein Bewegungsmodell notwendig. Mit diesem kann dann eine Messreihe interpoliert und der Verschiebungsbetrag analog zu den in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungen bestimmt werden. Außerdem besteht die Möglichkeit für eine ausgleichende Funktion die gesuchten Parameter zu bestimmen, wobei allerdings für jede Zeitreihe ein gesondertes Absolutglied berechnet wird.

Literaturverzeichnis

- Akima, H. (1970). A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery* 17(4): 589-602.
- Baarda, W. (1968). A testing procedure for use in geodetic networks. Delft, Netherlands Geodetic Commission: Publications on Geodesy 9 (Vol. 2 Nr. 5).
- Baglikow, V. (2003). Bergschäden nach Beendigung der Grubenwasserhaltung im tiefen Bergbau. *Markscheidewesen* 2(110)2003: 45-49.
- Baumann, E. (1994). *Vermessungskunde*, Band 1. Bonn, Ferd. Dümmlers Verlag.
- BBergG (2009). Bundesberggesetz. BBergG: Vom 13. August 1980 zuletzt geändert durch Art. 1915a G v. 1931.1987.2009.
- Beutelspacher, A. und Zschiegner, M.-A. (2007). *Diskrete Mathematik für Einsteiger*. Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH.
- Büchter, A. und Henn, H.-W. (2005). *Elementare Stochastik*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag.
- Busch, W. und Hirsemann, A. (2007). Abschlussbericht zur "Auswertung von bestehenden Leitnivelements und ihre Analyse über gefluteten Grubenfeldern bezüglich eintretender Höhenänderungen" Institut für Geotechnik und Markscheidewesen, TU Clausthal (unveröffentlicht).
- Carosio, A. (2008). *Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung*, Band 1. Zürich, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Engeln-Müllges, G., Niederdrenk, K., et al. (2011). *Numerik-Algorithmen*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.
- Fenk, J. (1993). Senkung der Tagesoberfläche durch Grundwasserentzug im Lockergebirge. *Institutsschriften H. 15*. Leoben: S. 93-108.
- Fenk, J. (1997). Zeitreihenanalyse für Hebungsprozesse über stillgelegten Steinkohlenbergwerken. *Neue Technologien und Aufgaben in den Geowissenschaften*. 41. Wissenschaftliche Tagung des Deutschen Markscheider-Vereins e.V., 10.-13. September 1997. (Hrsg.), D. M.-V. Bad Neuenahr, Hrsg.: Deutscher Markscheider-Verein: Wissenschaftliche Schriftenreihe im Markscheidewesen, Das Markscheidewesen in der Rohstoff-, Energie- und Entsorgungswirtschaft, Heft 17, 117-122.
- Förstner, W. (1979). Das Programm TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodätischer Lagenetze. *Zeitschrift für das Vermessungswesen* Heft 2, Jg. 104: 61-72.

- Fröhlich, H. (2000, 9.2.2001). NIVNETplus - Nivellementnetz-Planung, -Analyse, -Ausgleichung. Retrieved 25.5.2011, from http://www.trukksoft.de/files/Nivnet_Handbuch.pdf.
- Ge, N. (2010). Ein Multi-Temporales L2-Norm-Basiertes Auswerteverfahren für SAR-Szenen-Stapel zur Ableitung von Bodenbewegungen. Institut für Geotechnik und Markscheidewesen, Technischen Universität Clausthal. Masterarbeit (unveröffentlicht).
- Gruber, F. J. und Joeckel, R. (2011). Formelsammlung für das Vermessungswesen. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden.
- Hanssen, R. F. (2001). Radar interferometry. Dordrecht u.a, Kluwer Acad. Publ.
- Höpcke, W. (1980). Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter.
- Jäger, R., Müller, T., et al. (2005). Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren. Heidelberg, Herbert Wichmann Verlag.
- Kahmen, H. (1997). Vermessungskunde. Berlin, New York, De Gruyter.
- Kampmann, G. (1986). Robuster Ausreißertest mit Hilfe der L1-Norm-Methode. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten Heft 4, Jg. 93: 139-147.
- Kampmann, G. (1992). Günstigste Netzeinpassung mit Mini-Max-Koordinatenklaffungen nach Tschebyscheff. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten Heft 6, Jg. 99: 260-264.
- Knospe, S., Hebel, H.-P., et al. (2011). Die Anwendung der satellitengestützten Radarinterferometrie zur großräumigen Erfassung von Höhenänderungen. Geomonitoring Tagung 2011 – Ein Paradigmenwechsel zur Beherrschung von Georisiken; 3.-4. März 2011 Clausthal-Zellerfeld, Hrsg.: Busch, W.; Niemeier, W.; Sörgel, U. : 73–90.
- Koch, K.-R. (2004). Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. vierte, bearbeitete Auflage. Retrieved 13.07.2010, from http://www.igg.uni-bonn.de/tg/fileadmin/publication/media/buch97_format_neu.pdf.
- Kratzsch, H. (1997). Bergschadenkunde. Essen, DMV-Verlag.
- Kraus, K. (2000). Photogrammetrie Band 3 - Topographische Informationssysteme. Köln, Dümmler Verlag.
- Lehmann, R. (2010). Normierte Verbesserung - wie groß ist zu groß? Allgemeine Vermessungs-Nachrichten Heft 2, Jg. 117: 53-61.

- Lother, G. und Strehle, J. (2007). Grundlagen der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Hochschule München; Fakultät der Geoinformation.
- Mittag, H.-J. (2011). Statistik - Eine interaktive Einführung. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.
- Mosler, K. und Schmid, F. (2006). Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik. Berlin, Springer-Verlag.
- Mühlenbeck, H. (2005). Hebungen nach Einstellung von Wasserhaltung im Ruhrgebiet. Markscheidewesen 112 (2005) 3: 97-102.
- Navratil, G. und Staudinger, M. (2006). Ausgleichungsrechnung oder Die Anwendung statistischer Methoden in Vermessungswesen und GIS - Ein Skriptum zu den Lehrveranstaltungen Ausgleichungsrechnung I + II. Wien, Institute für Geoinformation und Kartographie.
- Niemeier, W. (2008). Ausgleichungsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter.
- Plato, R. (2006). Numerische Mathematik kompakt. Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.
- Pope, A. J. (1976). The statistics of residuals and the detection of outliers. Rockville, Md, International Union of Geodesy and Geophysics. General Assembly Geodetic Research and Development Laboratory, National Geodetic Survey, National Ocean Survey.
- Schade, M. (2004). Vertikale Bodenbewegungen infolge des Grundwasser-Wiederaanstieges im Zusammenhang mit der planmäßigen Flutung stillgelegter Braunkohletagebaue. ... aus Tradition modern. 44. Wissenschaftliche Tagung des Deutschen Markscheider-Vereins e.V., 15.-18. September 2004. Bochum, Hrsg.: Deutscher Markscheider-Verein: Wissenschaftliche Schriftenreihe im Markscheidewesen, Das Markscheidewesen in der Rohstoff-, Energie- und Entsorgungswirtschaft, Heft 21, 56-72.
- Schäfer, M., Busch, W., et al. (2007). Radarinterferometrische Erfassung von Höhenänderungen im Bereich aktiver Braunkohletagebaue im Südraum Leipzig. Wir geben die Richtung vor! 45. Wissenschaftliche Tagung des Deutschen Markscheider-Vereins e.V., 12.-15. September 2007. Leipzig, Hrsg.: Deutscher Markscheider-Verein: Wissenschaftliche Schriftenreihe im Markscheidewesen, Das Markscheidewesen in der Rohstoff-, Energie- und Entsorgungswirtschaft, Heft 22, 394 – 407.
- Schäfer, M., Busch, W., et al. (2008). Untersuchungen zum Einsatz der Radarfernerkundung zur Erfassung von Bodenbewegungen im Zusammenhang mit sekundären Fördermaßnahmen. DGMK/ÖGEW-Frühjahrstagung. 10.-11. April 2008, Celle, DGMK Tagungsbericht 2008-1.

- Schäfer, M., Schäfer, T., et al. (2008a). Verwendung von Radarsatellitendaten zur Detektion von Höhenänderungen über einer Erdöllagerstätte. Erdöl Erdgas Kohle Heft 11, Jg. 124: S. 477 - 481.
- Schäfer, T., Schäfer, M., et al. (2008b). Einsatz der differentiellen Radarinterferometrie zur Erfassung von Bodenbewegungen im Bereich einer Erdöllagerstätte im westlichen Emsland. 9. Geokinematischer Tag, 8.-9. Mai 2008. Freiberg, Schriftenreihe des Institutes für Markscheidewesen und Geodäsie an der Technischen Universität Bergakademie, Heft 2008-1: S. 66-74.
- Schwarz, H. R. und Köckler, N. (2006). Numerische Mathematik. Wiesbaden, Teubner.
- Sieg, D. und Hirsch, M. (2000). Varianzkomponentenschätzung in ingenieurgeodätischen Netzen Teil 1: Theorie. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten Heft 3, Jg. 107: 82-90.
- Spreckels, V., Walter, D., et al. (2008). Nutzung der Radarinterferometrie im Steinkohlenbergbau. Allgemeine Vermessungsnachrichten Heft 7, Jg. 115: 253-261.
- Vahrenkamp, R. und Mattfeld, D. C. (2007). Logistiknetzwerke - Modelle für Standortwahl und Tourenplanung. Wiesbaden, Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler | GWV Fachverlage GmbH.
- Welsch, W. (1984). Grundlagen, Gebrauchsformeln und Anwendungsbeispiele der Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik Heft 9, Jg. 82: 296-301.
- Wolf, H. (1994). Ausgleichungsrechnung I. Formeln zur praktischen Anwendung. Bonn, Ferd. Dümmlers Verlag.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Durch Nivellement bestimmter Höhenunterschied zwischen zwei Punkten zu einem Zeitpunkt.....	4
Abbildung 2.2: Durch Radarinterferometrie bestimmter Höhenänderung eines Punktes zu zwei Zeitpunkten	4
Abbildung 2.3: Prinzip der gemeinsamen Ausgleichung von Radardaten und Nivellement.....	5
Abbildung 2.4: Lageplan der Nivellementpunkte (1 bis 29) und der Corner-Reflektoren (ab Nummer 47) mit dem Nivellementweg	18
Abbildung 2.5: Länge der räumlichen Basislinie – ungewichtete Ausgleichung (Corner-Reflektor 115).....	20
Abbildung 2.6: Länge der räumlichen Basislinie – gewichtete Ausgleichung (Corner-Reflektor 115).....	21
Abbildung 2.7: Anzahl der Beobachtungen nach der Größe der Basislinien (Corner-Reflektor 103).....	22
Abbildung 2.8: Ausgegliche Höhen bei Verwendung aller Beobachtungen und der Beobachtungen mit einer Basislinie kürzer 800 Meter (Corner-Reflektor 103).....	23
Abbildung 2.9: Anzahl der Beobachtungen je Zeitpunkt nach der Ausgleichung (Corner-Reflektor 86)	24
Abbildung 2.10: Ausgegliche Höhen des Corner-Reflektors 47 (links - mit Ausreißern; rechts – ohne Ausreißer).....	25
Abbildung 2.11: Größe der Verbesserung der als grober Fehler eingestuftten Beobachtungen bezüglich des jeweiligen Berechnungsdurchlaufes bei Verwendung aller Daten mit den ursprünglichen Gewichten ($NV = 2,5$).....	27
Abbildung 2.12: Größe der Verbesserung der als grober Fehler eingestuftten Beobachtungen bezüglich des jeweiligen Berechnungsdurchlaufes bei Verwendung aller Daten nach der ersten Varianzkomponentenschätzung ($\lambda_{Gesamt} = 255$ und $NV = 2,5$).....	28
Abbildung 2.13: Korrekturfaktor λ_{Gesamt} im Verlauf der Iteration.....	30
Abbildung 2.14: Anteil, der in der Berechnung verbleibenden Beobachtungen	31
Abbildung 2.15: Standardabweichung einer Beobachtung mit dem Gewicht $p_0 = 1$	32
Abbildung 2.16: Größe der Verbesserung der als grober Fehler eingestuftten Beobachtungen bezüglich des jeweiligen Berechnungsdurchlaufes bei Verwendung aller Daten nach der Varianzkomponentenschätzung ($\lambda_{Gesamt} = 497$ und $NV = 2,5$)	33

Abbildung 2.17: Maximale, minimale und durchschnittliche Verbesserungen in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen].....	34
Abbildung 2.18: Maximale, minimale und durchschnittliche a priori Standardabweichung in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]	36
Abbildung 2.19: Maximale, minimale und durchschnittliche a posteriori Standardabweichung in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]	37
Abbildung 2.20: Maximaler, minimaler und durchschnittlicher Genauigkeitsgewinn in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Beobachtungen; b) des Nivellements; c) der Radarbeobachtungen]	38
Abbildung 2.21: Lage der Punkte mit der kleinsten und größten Standardabweichung.....	39
Abbildung 2.22: Maximale, minimale und durchschnittliche Standardabweichung der unbekannten Höhen in Abhängigkeit vom Koeffizienten λ_{Gesamt} [a) aller Höhen; b) nur durch Nivellement bestimmte Höhen; c) nur durch Radarinterferometrie bestimmte Höhen; d) durch beide Verfahren bestimmte Höhen].....	40
Abbildung 2.23: Ausgegliche Höhen des Corner-Reflektors 47 mit den dazugehörigen Standardabweichungen	41
Abbildung 2.24: Standardabweichung der ausgeglichenen Höhen des Corner-Reflektors 47	42
Abbildung 2.25: Korrekturfaktor λ_{Gesamt} im Verlauf der Iteration	43
Abbildung 2.26: Anteil, der in der Berechnung verbleibenden Beobachtungen	43
Abbildung 2.27: Auftretende Phasensprünge (Corner-Reflektor 127).....	44
Abbildung 2.28: Korrektur der auftretenden Phasensprünge (Corner-Reflektor 127).....	45
Abbildung 2.29: Überbrückung von räumlichen Distanzen	46
Abbildung 2.30: Zusammenführen von mehreren Zeitreihen	47
Abbildung 3.1: Messreihen mit Nullmessungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten (Interpolation durch Geradenstücken).....	48
Abbildung 3.2: Einpassen der 2. Messreihe in die Werte der 1. Messreihe	50
Abbildung 3.3: Nachteil des linearen Interpolierens	51
Abbildung 3.4: Vergleich verschiedener Interpolationen [Beispiel nach (Kraus 2000)].....	51
Abbildung 3.5: Prinzipskizze und Bezeichnung der Akima-Interpolation [nach (Kraus 2000)]	53
Abbildung 3.6: Bessere Einpassung durch die Akima-Interpolation.....	54

Abbildung 3.7: Verschiedene Rundungsbereiche am Schnittpunkt zweier Geraden	55
Abbildung 3.8: p_1 – Gewicht entsprechend der Länge des Intervalls; a) großer Bereich – kleines Gewicht; b) kleiner Bereich – großes Gewicht.....	56
Abbildung 3.9: p_2 – Gewicht entsprechend des Abstandes zum nächstgelegenen Punkt der ersten Messreihe; a) großer Abstand – kleines Gewicht; b) kleiner Abstand – großes Gewicht	57
Abbildung 3.10: Vergleich gewichteter und ungewichteter Berechnung beim Einpassen der zweiten Messreihe (Akima-Interpolation)	58
Abbildung 3.11: Vergleich gewichteter und ungewichteter Berechnung beim Einpassen der zweiten Messreihe (lineare Interpolation)	59
Abbildung 3.12: Messreihen der Untersuchungen	60
Abbildung 3.13: Messreihe C durch verschiedenstarkes Rauschen überlagert.....	61
Abbildung 3.14: maximaler Verschiebungsbetrag v ($R=0,1$; zweite Messreihe verrauscht; Akima-Interpolation; Verwendung der Gewichte).....	62
Abbildung 3.15: Vertauschen der ersten und zweiten Messreihe ($R=0$; Akima-Interpolation; Messreihe B).....	63
Abbildung 3.16: maximaler Verschiebungsbetrag v ($R=1$; Messreihe A; Akima-Interpolation; Verwendung der Gewichte).....	64
Abbildung 3.17: maximaler Verschiebungsbetrag v ($R=0,1$; Messreihe B, zweite Messreihe verrauscht)	65
Abbildung 3.18: Überlappung der Messreihen in den Randbereichen (Messreihe B)	66
Abbildung 3.19: gewichtetes und ungewichtetes Einpassen ($R=1$; Messreihe D; Akima- Interpolation)	67
Abbildung 3.20: Zeit-Höhenänderungsdiagramm des Beispiels 1 (Nivellement und Envisat).....	69
Abbildung 3.21: Zusammengeführte Messreihen des Beispiels 1 mit (a) und ohne (b) Berücksichtigung der Gewichte.....	70
Abbildung 3.22: Zeit-Höhenänderungsdiagramm des Beispiels 2 (Envisat und TerraSAR-X)	71
Abbildung 3.23: Zusammengeführte Messreihen des Beispiels 2	72
Abbildung 3.24: Zeit-Höhenänderungsdiagramm des Beispiels 3 (unterschiedliche Blickrichtung des Satelliten)	73
Abbildung 3.25: Zusammengeführte Messreihen des Beispiels 3	74
Abbildung 3.26: Polynomiale Anpassung und Residuen des Beispiels 1	76
Abbildung 3.27: Polynomiale Anpassung und Residuen des Beispiels 3	77
Abbildung A.1: Flussdiagramm der Varianzkomponentenschätzung	95

Abbildung A.2: Flussdiagramm der Ausgleichung.....	96
Abbildung A.3: Flussdiagramm der gemeinsamen Varianzkomponentenschätzung und Ausgleichung.....	97
Abbildung A.4: Flussdiagramm für die Kombination zweier Zeitreihen	105

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1: Quantile der Normalverteilung	15
Tabelle 3.1: Standardabweichungen zum approximierenden Polynom	75
Tabelle A.1: Ein- und Ausgangsvariablen der Funktionen	103
Tabelle A.2: Ein- und Ausgangsvariablen der Funktionen	107

Verzeichnis der verwendeten Variablen

A	A-Matrix; Koeffizientenmatrix
A	Prozentuale Anteil der zweiten Messreihe an der Gesamtanzahl
a_{ij}	Koeffizienten der partiellen Ableitung der i-ten Beobachtung nach der Unbekannten j
$\alpha_{0,k}^2, \alpha_{1,k}^2$	Korrekturfaktoren für die Beobachtungsgruppe k
$\alpha_{i,i+1}$	Steigungswinkel
C	Matrix der Koeffizienten der Interpolation
c_i	Koeffizienten der Interpolation
β	Maß für die Rundung
e	Einsvektor: $\mathbf{e}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$
f	Freiheitsgrad
H_{ij}	Höhe des Punktes j zu einer Zeit i
Δh	Höhenunterschied, -änderung
i, j, k	Laufvariablen
$\tilde{\mathbf{L}}$	Vektor der „wahren“ Beobachtungen
\tilde{L}_i	„Wahre“ Beobachtung
$\hat{\mathbf{L}}$	Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen
\hat{L}_i	Ausgeglichene Beobachtung
L	Vektor der tatsächlichen Beobachtungen
L_i	Tatsächliche Beobachtung
$\hat{\mathbf{I}}$	Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen
\hat{I}_i	Ausgeglichene Beobachtung (verkürzt)
I	Verkürzter Beobachtungsvektor der tatsächlichen Beobachtungen
I_i	Tatsächliche Beobachtung (verkürzt)
λ	Korrekturfaktor der Gewichte
λ_{Gesamt}	Gesamtkorrekturfaktor
λ_{radar}	Wellenlänge der Radarmessung
m_i	Steigung der Sehne i
N	Normalgleichungsmatrix
n	Absolutgliedvektor

n	Anzahl der Beobachtungen; Anzahl der Messpunkte
NV, NV_i	Normierte Verbesserung
\mathbf{P}, \mathbf{P}_k	Gewichtsmatrizen (der Beobachtungsgruppe k)
$P_n(T)$	Interpolierendes Polynom n-ten Grades
P_i	Bezeichnung eines Punktes
p_i	Gewicht der Beobachtung i
p_{niv}	Gewicht des nivellierten Höhenunterschieds
p_{rad}	Gewicht des radarinterferometrischen Höhenänderungen
$\mathbf{Q}_{II}, \mathbf{Q}_{II,k}$	Kofaktorenmatrix der ursprünglichen Beobachtungen (der Beobachtungsgruppe k)
$\mathbf{Q}_{\hat{II}}$	Kofaktorenmatrix der ausgeglichen Beobachtungen
$q_{\hat{II}}$	Kofaktor der ausgeglichenen Beobachtungen
\mathbf{Q}_{xx}	Kofaktorenmatrix der Unbekannten x
q_{xx}	Kofaktor der Unbekannten x
$\mathbf{Q}_{vv}, \mathbf{Q}_{vv,k}$	Kofaktorenmatrix der Verbesserungen
q_{vv}	Kofaktor der Verbesserungen
R	Standardabweichung der Streuung
r	Freiheitsgrad, Redundanz des Messnetzes
$r_{ges,k}$	Gesamtredundanz der Beobachtungsgruppe k
r_i	Redundanz einer einzelnen Beobachtung
$\rho_{i_1 i_2}$	Korrelationskoeffizient zwischen der Beobachtungen L_{i_1} und L_{i_2}
$s_0^2, s_{0,k}^2, s_{n,k}^2$	empirische Varianz der Gewichtseinheit (der Beobachtungsgruppe k)
$s_0, s_{0,k}$	empirische Standardabweichungen der Gewichtseinheit (der Beobachtungsgruppe k)
s_l, s_{l_i}	Standardabweichungen der ursprünglichen Beobachtungen i
$s_{\hat{l}}$	Standardabweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen
s_x	Standardabweichung der Unbekannten
$S_{niv[km]}$	Länge der Nivellementstrecke
S_{basis}	Länge der räumlichen Basislinie
S	Ordinate (Interpolation)
S'_i	Steigung im Punkt i
$\Sigma_{II}, \Sigma_{II,k}$	Varianz-Kovarianzmatrix aller Beobachtungen

$\sigma_0^2, \sigma_{0,k}^2$	Theoretische Varianz der Gewichtseinheit (der Beobachtungsgruppe k)
$\sigma_0, \sigma_{0,k}$	Theoretische Standardabweichungen der Gewichtseinheit (der Beobachtungsgruppe k)
σ_i	Standardabweichung der Beobachtung L_i
σ_i^2	Varianz der Beobachtung L_i
$\sigma_{[km]}^2$	Genauigkeit des Instruments (meist Herstellerangaben)
T	Abszisse (Interpolation)
t_i	Zeitpunkt der Messung
u	Anzahl der Unbekannten
\mathbf{v}, \mathbf{v}_k	Vektor der Verbesserungen
v_i	Verbesserung der Beobachtung i
v	Verschiebungsbetrag (Interpolation)
$\tilde{\mathbf{X}}$	Vektor der „wahren“ Unbekannten
\tilde{X}_j	„Wahre“ Unbekannte
$\hat{\mathbf{X}}$	Vektor der ausgeglichenen Unbekannten
\hat{X}_j	Geschätzte Unbekannte
$\hat{\mathbf{x}}$	Vektor der gekürzten ausgeglichenen Unbekannten
\hat{x}_j	Gekürzte ausgeglichene Unbekannte

Abkürzungsverzeichnis

ASAR	Advanced Synthetic Aperture Radar
BBergG	Bundesberggesetz
DInSAR	Differential Radar Interferometry
Envisat	Environmental Satellite
PSI	Persistent Scatterer Interferometry
UVP	Umweltverträglichkeitsprüfung

Danksagung

Die in dieser Arbeit entwickelten Ideen und gezeigten Ergebnisse sind während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Abteilung Markscheidewesen und Geoinformation am Institut für Geotechnik und Markscheidewesen der Technischen Universität Clausthal entstanden. Deshalb möchte ich mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich in dieser Zeit unterstützt, fachlich begleitet, gefördert und gefordert haben.

Als erstes bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Busch. Er hat diese Arbeit von Anfang an unterstützt, fachlich begleitet und immer gefördert. Mein Dank gilt den nützlichen fachlichen Diskussionen und die vielen Anregungen zum Inhalt dieser Arbeit. Besonderen Dank empfinde ich auch für das Schaffen der nötigen Freiräume zum Fertigstellen der Arbeit.

Daneben möchte ich Prof. Dr.-Ing. habil. Anton Sroka für die Übernahme der Mitberichterstattung danken.

Dank schulde ich auch meinen Kollegen am IGMK, die für Diskussionen immer zur Verfügung standen. Mein Dank gilt dabei im besonderen Dipl.-Inf. Wilhelm Hannemann. Ebenso danke ich den Dipl.-Geologen Michael und Tanja Schäfer für die erfolgreiche Zusammenarbeit im Emsland-Projekt. Marc Neumann und den studentischen Mitarbeitern danke ich für die immer problemlosen Messkampagnen.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mich bei all meinen Entscheidungen immer unterstützt haben.

A. Implementierung der Programmpakete

A.1 Implementierung der Ausgleichung und Varianzkomponentenschätzung

Für die in den Kapiteln 2.4 und 2.5 beschriebenen Berechnungen wurden in MATLAB® drei Programme für die Ausgleichung, die Varianzkomponentenschätzung und die gemeinsame Verwendung beider Verfahren zur Auswertung der Eingangsdaten implementiert. Die Programme setzen sich aus verschiedenen Funktionen zusammen, in denen die erforderlichen Rechnungen ausgeführt werden. Im Folgenden werden die Programme und Funktionen im Einzelnen vorgestellt. Der Ablauf der Programme ist in den nachstehenden Flussdiagrammen dargestellt. Die Abbildung A.1 zeigt den Verlauf der Varianzkomponentenschätzung, die Abbildung A.2 die Durchführung der Ausgleichungsrechnung, und Abbildung A.3 die Kopplung beider Rechenverfahren. Die nachfolgend beschriebenen Funktionen können wie in den Programmen in einer vorgegebenen Reihenfolge abgearbeitet oder einzeln aufgerufen werden.

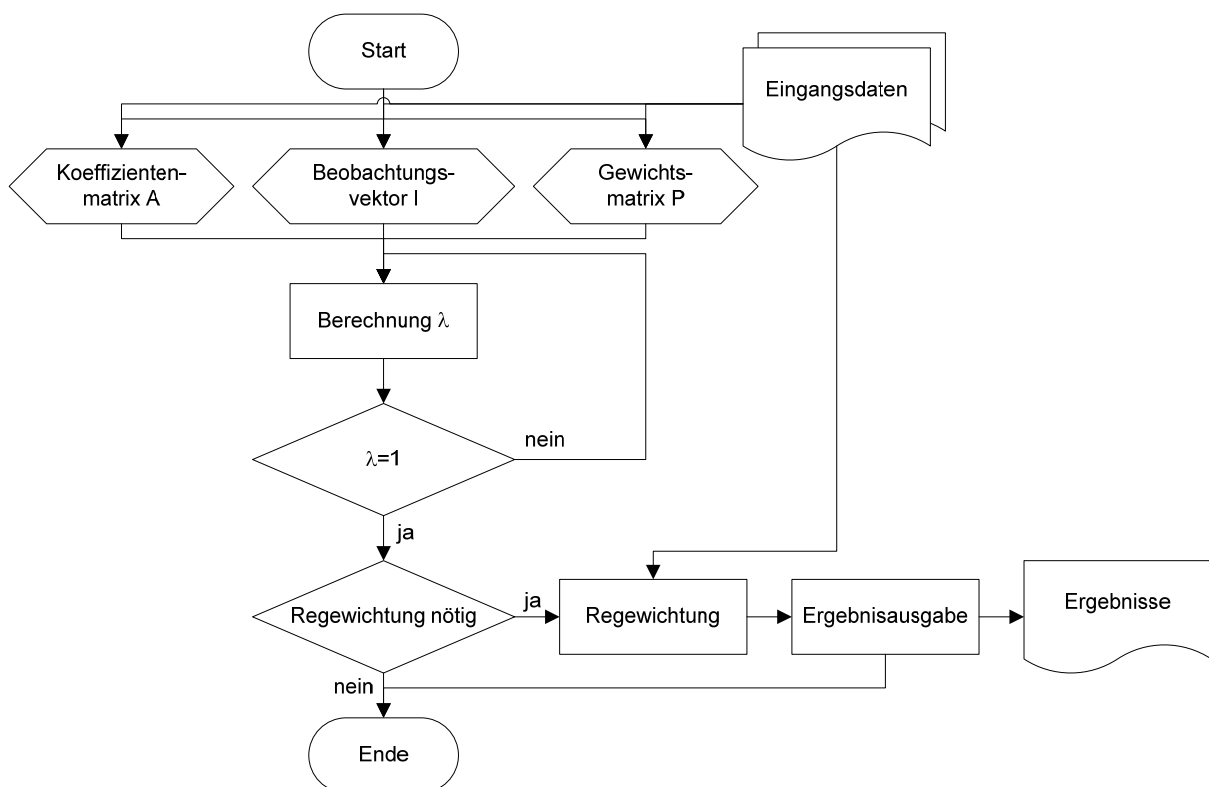
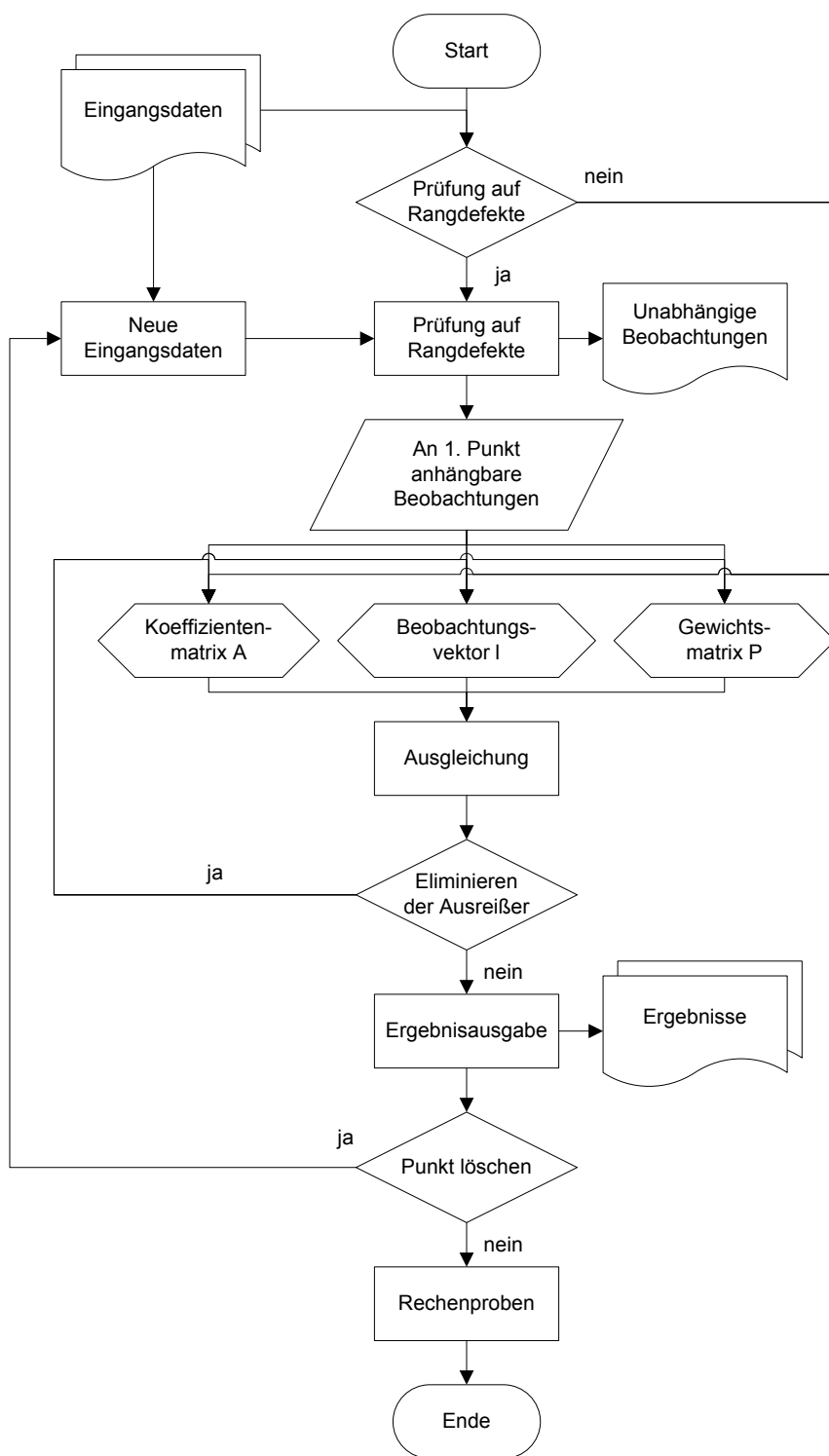
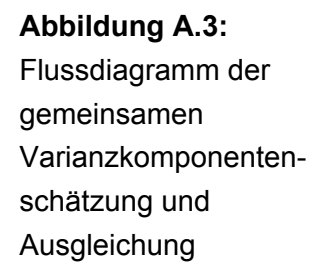
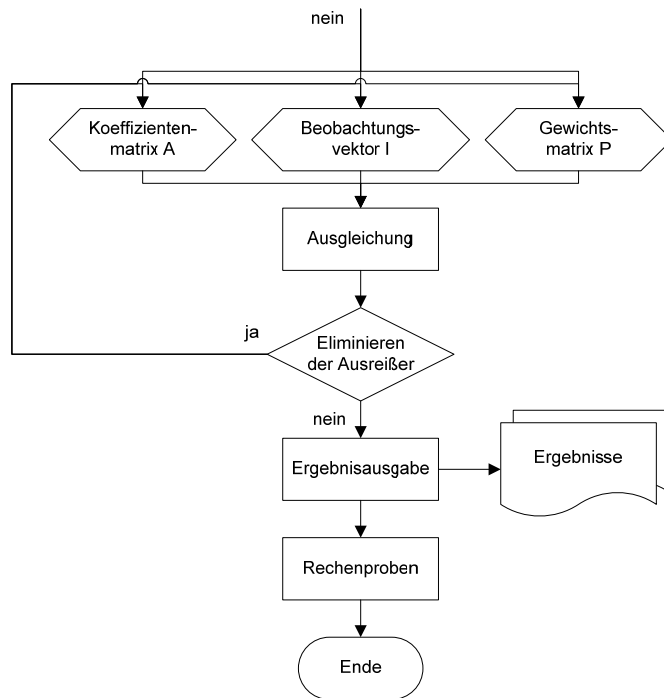


Abbildung A.1: Flussdiagramm der Varianzkomponentenschätzung

**Abbildung A.2:** Flussdiagramm der Ausgleichung





Fortsetzung der
vorherigen Abbildung

In Abbildung A.3 sind die Ausgabe der Ergebnisse der Ausgleichung und die Ausgabe neugewichteter Radardaten im Programmpunkt „Ergebnisausgabe“ zusammengefasst.

Funktionen zum Datenimport

Diese Funktionen dienen der Bereitstellung der für die Berechnungen erforderlichen Eingangsdaten. Die Daten liegen in einzelnen Dateien vor und sind in nivellierte und die durch Radarinterferometrie bestimmte Höhenunterschiede unterteilt.

- Dateneingabe.m

Diese Funktion wird in der Ausgleichungsrechnung aufgerufen. Sie dient zur Benennung eines Punktes, dessen Höhenwerte ausgeglichen werden sollen. Analog können ein Name für ein ganzes Gebiet oder andere Parameter im Punktnamen abgelegt werden. Bei der Dateneingabe erfolgt eine Abfrage, ob beide Messgruppen zusammen oder nur eine der Gruppen ausgewertet werden sollen. Diese Abfrage ist lediglich für die Ausgabe von unabhängigen Beobachtungen und zum Sichern getrennter neuer Eingangsdaten notwendig. Auf die Berechnung hat die Trennung in zwei Beobachtungsgruppen keinen Einfluss. Die einzulesenden Dateien genügen dem Format 1. (Zeit-)Punkt – 2. (Zeit-)Punkt – Δh - Gewicht.

- Dateneingabe_VKS.m

Diese Funktion wird bei der Varianzkomponentenschätzung und den gemeinsamen Auswertungen der Varianzkomponentenschätzung und Ausgleichung aufgerufen. Hier wird vorausgesetzt, dass beide Messgruppen eingelesen werden müssen, da

andernfalls eine Auswertung wenig sinnvoll ist. Hier können ein Punktname oder ein Messgebiet angegeben werden.

Funktionen zum Datenexport

Nach den Berechnungen ist es möglich, deren Ergebnisse und neue Eingangsdaten für nachfolgende Nutzungen in Dateien auszugeben. Vor der Ausgabe werden die ursprünglichen Beobachtungen nochmals auf Rangdefekte überprüft, um diese in den neu erstellten Eingangsdaten auszuschließen.

- Ergebnisausgabe.m

Nach jeweiligen Abfragen können die

- ausgeglichenen Höhen der Punkte \hat{x} mit den dazugehörigen Standardabweichungen s_x ,
- die ursprünglichen Beobachtungen \mathbf{l} im Vergleich zu den ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\mathbf{l}}$ und den daraus abgeleiteten Verbesserungen \mathbf{v} ,
- und die Ergebnisse graphisch ausgegeben werden.

- Neue_Eingangsdaten.m

Daneben können neue Beobachtungen für nachfolgende Auswertungen ausgegeben werden. Wenn alle Beobachtungen eines Punktes, der sich als Ausreißer in der Zeitreihe erweist, aus der Gesamtheit der Beobachtungen genommen werden, ist dies zweckmäßig. Die Auswahl erfolgt aus den ursprünglichen Eingangsdaten (kontrolliert auf Rangdefekte). Dabei sind ebenfalls alle Beobachtungen enthalten, die auf Grund ihrer normierten Verbesserung aus der Ausgleichung genommen wurden.

Es besteht des Weiteren die Möglichkeit, nach der Varianzkomponentenschätzung neu gewichtete Radardaten in einer neuen Textdatei abzulegen.

Außerdem werden alle verwendeten Matrizen und Vektoren gespeichert, damit sie für spätere Auswertungen, wie zum Beispiel die Berechnung von weiteren Kennwerten, oder zur Analyse von Korrelationen oder Redundanzen zur Verfügung stehen.

Funktionen zur Extraktion und Bearbeitung der Eingangsdaten

- Matrizenerstellung.m

Die Funktionen dienen zur Erstellung des Beobachtungsvektors \mathbf{l} , der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und der Gewichtsmatrix \mathbf{P} aus den eingelesenen Dateien des Nivellements oder der Radarinterferometrie.

- Grobe_Fehler.m

Diese Funktion kommt nach der eigentlichen Ausgleichungsrechnung zum Einsatz. Sie dient dazu Beobachtungen, die möglicherweise fehlerbehaftet sind über die normierte Verbesserung zu erkennen. Diese werden dann aus der Gesamtheit aller Beobachtungen herausgenommen, um anschließend die Matrizen **A**, **I** und **P** neu zu erstellen und das Netz nochmals auszugleichen. Die Funktionen wechseln sich so lange ab, bis ein festgelegter Grenzwert für die normierte Verbesserung nicht mehr überschritten wird.

Funktionen zur Aufbereitung der Eingangsdaten

Vor den eigentlichen Berechnungen können zwei Funktionen aufgerufen werden, die bereits nach Fehlern in den Messdaten suchen. Diese können in der Konfiguration des Messnetzes oder durch Phasensprünge auftreten.

- Phasenkorrektur.m

In diesem Programm wird bereits eine vollständige Ausgleichungsrechnung durchgeführt. Anschließend werden die Beträge der Verbesserungen mit der Wellenlänge verglichen. Sind die berechneten Verbesserungen größer als 60 Prozent der Wellenlänge, wird diese in Abhängigkeit vom Vorzeichen zu den Beobachtungen addiert oder subtrahiert. Nach einer folgenden Ausgleichung werden die Beträge der Verbesserungen erneut überprüft und die Beobachtungen gegebenenfalls um den Betrag der Wellenlänge geändert. Die so entstandenen neuen Radarbeobachtungen werden abschließend in einer Textdatei für weitere Auswertungen bereitgestellt.

- Rangdefekt.m

Diese Funktion kann vor den gewünschten Berechnungen ausgeführt werden, sie wird allerdings regulär in den Berechnungen selbst in verschiedenen Arbeitsschritten (etwa nach dem Löschen einzelner Punkte) aufgerufen, um die Singularität der **Q_{xx}**-Matrix zu verhindern. Mit Hilfe der Breitensuche der Graphentheorie wird untersucht, welche Punkte sich über die Beobachtungen an den ersten Punkt anbinden lassen. Beobachtungen, für die dies nicht möglich ist, werden als unabhängig aus der Gesamtheit aller gemessenen Höhendifferenzen herausgenommen und in Dateien abgelegt. Eine gesonderte Ausgabe der verbleibenden Beobachtungen erfolgt nicht. Mit ihnen wird direkt weitergearbeitet.

Berechnungen

Die eigentlichen Berechnungen finden in den Funktionen der Ausgleichsrechnung und der Berechnung des Korrekturfaktors λ statt.

- Ausgleichsrechnung.m

Aus den Eingangsdaten (Beobachtungsvektor \mathbf{I} , Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und den Gewichten \mathbf{P}) werden die Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$, die verbesserten Beobachtungen $\hat{\mathbf{I}}$, die Verbesserungen \mathbf{v} , die dazugehörigen Kofaktorenmatrizen, sowie die Standardabweichung der Gewichtseinheit s_0 , der Unbekannten s_x und der ursprünglichen und ausgeglichenen Beobachtungen (s_i und s_j) berechnet.

- Berechnung_Korrekturfaktor_VKS.m

In dieser Funktion wird als Quotient der Varianzen der einzelnen Beobachtungsgruppen die Korrektur λ abgeleitet. Die Varianzen werden hierfür über die Formel (2-14) hergeleitet. Um die eigentliche Ausgleichsberechnung mit allen damit in Verbindung stehenden Kennwerten zu umgehen, lassen sich die Größen durch Vereinfachen der in Kapitel 2.1 gegebenen Formeln herleiten. Der erforderliche Vektor der Verbesserungen \mathbf{v} kann somit nach

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{n} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{n} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{I}\end{aligned}$$

berechnet werden.

Die Redundanz $r_{ges,k}$ ergibt sich neben der Summation der einzelnen Redundanzanteile der Beobachtungen ebenso als Spur des Matrizenproduktes $\mathbf{P}\mathbf{Q}_{vv}$.

$$r_{ges,k} = spur(\mathbf{P}_k\mathbf{Q}_{vv,k})$$

mit $\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{jj}$

mit $\mathbf{Q}_{jj} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ und

und $\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$

Durch diese mathematischen Zusammenhänge lässt sich die Redundanz ebenfalls direkt aus den Eingangsgrößen abgeleiteten Größen \mathbf{I} , \mathbf{A} und \mathbf{P} bestimmen. Wenn damit die Schätzung der Varianzkomponenten unabhängig von einer

Ausgleichsrechnung durchgeführt werden kann, ist eine Prüfung auf Rangdefekte dennoch sinnvoll, damit die Inversion von singulären Matrizen ausgeschlossen werden kann.

Da bei diesen Berechnungen auf die Bestimmung der \mathbf{Q}_{xx} verzichtet wird, können die Varianzen für Netze mit Rangdefekt bestimmt werden. Dies muss bei eventuell anschließenden Berechnungen berücksichtigt werden.

Weitere Funktionen

- Proben.m

Diese Funktion wurde schon während der Entwicklung der anderen Funktionen eingesetzt, da mit ihr untersucht werden kann, ob der gesamte Formelapparat richtig implementiert wurde. Nun wird sie nach Abschluss der Ausgleichsrechnungen aufgerufen und zur Kontrolle der Berechnungen eingesetzt. In dieser Funktion werden folgende Proben durchgeführt:

- Proben der Normalgleichungen: $(\mathbf{Ae})^T \mathbf{P} = \mathbf{e}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P})$ und $\mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{Ae} + \mathbf{I}) = \mathbf{Ne} + \mathbf{n}$

Diese Proben gehen auf die Zeit der Berechnungen ohne Rechentechnik zurück. Um gegen Schreib- oder Zuweisungsfehler bei der rechnergestützten Bestimmung der gesuchten Werte geschützt zu sein, ist eine Prüfung weiterhin zweckmäßig. Mit der ersten Gleichung wird das Produkt $\mathbf{A}^T \mathbf{P}$ überprüft, indem mit dem Einsvektor $\mathbf{e}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ die Summen der einzelnen Zeilen bestimmt werden. Mit der zweiten Gleichung werden die Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} und \mathbf{n} , die rechte Seite der Normalgleichungen überprüft. Dabei muss der oben genannte Zusammenhang gelten (Niemeier 2008).

- Inversionsprobe: $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = \mathbf{I}$

Die Inversionsprobe dient neben der Kontrolle der Inversion, bei der eingesetzten Rechentechnik, gleichermaßen einer Überprüfung der Rechenschärfe (Niemeier 2008). Diese wird vor allem wichtig, wenn aus der \mathbf{Q}_{xx} -Matrix die Varianzen und Kovarianzen der Unbekannten \mathbf{x} abgeleitet werden.

- Probe der Verbesserungen: $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Mit dieser Berechnung wird geprüft, ob mit den berechneten Verbesserungen ein Minimum der Quadratsumme der Verbesserungen erreicht wird (Lothar und Strehle 2007).

- Zerlegung der Summe der Verbesserungsquadrate: $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{I} - \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$

Diese numerische Probe vergleicht die auf herkömmliche Weise berechnete Verbesserungsquadratsumme mit der Differenz der Gesamtvariation $\mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{I}$ und den Unbekanntenanteilen $\mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$ (Niemeier 2008).

- Probe von Ansermet: $sp(\mathbf{P} \mathbf{Q}_{II}) = n$, $sp(\mathbf{P} \mathbf{Q}_{II}) = u$ und $sp(\mathbf{P} \mathbf{Q}_{vv}) = n - u = r$

Mit diesen Formeln werden die Elemente der Hauptdiagonalen der Kofaktorenmatrizen der Beobachtungen und der Verbesserungen kontrolliert. So ist die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen Matrix $\mathbf{P} \mathbf{Q}_{II}$ gleich der Anzahl der Beobachtungen und die der Elemente der Hauptdiagonalen Matrix $\mathbf{P} \mathbf{Q}_{II}$ gleich der Anzahl der Unbekannten. Mit $\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{II} - \mathbf{Q}_{II}$ muss die Spur des Matrizenproduktes $\mathbf{P} \mathbf{Q}_{vv}$ den Freiheitsgrad des Netzes ergeben. Da die Anzahl der Beobachtungen bei den Berechnungen lediglich die tatsächlich eingelesenen Beobachtungen umfasst, müsste sie aufgrund der Festlegung der Höhe des ersten Punktes, für diese Proben um Eins erhöht werden (Navratil und Staudinger 2006; Niemeier 2008).

- Hauptprobe: $\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}$

Mit der Hauptprobe werden in der Ausgleichsrechnung die berechneten Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$ und Verbesserungen \mathbf{v} in die ursprünglichen (nichtlinearen) Beobachtungsgleichungen eingesetzt. Damit soll neben der Rechengenauigkeit vor allem geprüft werden, ob die eingeführten Näherungskordinaten richtig gewählt wurden und die Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}$ damit klein genug sind. Denn nur unter dieser Bedingung ist ein Abbruch der Taylorreihenentwicklung nach dem ersten Glied zulässig. Da es sich bei dem hier behandelten Problem um ein lineares handelt und keine Näherungskordinaten eingeführt wurden (siehe „Funktionales Modell“), werden lediglich Rechnung und Fehler überprüft (Navratil und Staudinger 2006; Niemeier 2008).

In der folgenden Tabelle sind die Eingangs- und Ausgabevariablen der beschriebenen Funktionen zusammengestellt.

Tabelle A.1: Ein- und Ausgangsvariablen der Funktionen

Funktion	Eingangsvariablen	Ausgabevariablen
Ausgleichsrechnung	I, A, P, Anz_Beo, Anz_Pkt	x, Qxx, QII, I_, QI_I_, v, Qvv, s0, s_x_i, s_I_a_priori, s_I_a_posteriori

Berechnung_Korrekturfaktor_VKS	A, P, I, Anz_Beo_niv, Anz_Beo	lambda
Dateneingabe		Pkt_name, datei_niv, datei_rad, daten_niv, daten_rad
Dateneingabe_VKS		Pkt_name, datei_niv, datei_rad, daten_niv, daten_rad
Ergebnisausgabe	Pkt_name, Mess_pkt, x, s_x_i, I_, v, daten_niv, daten_rad, Anz_Beo_niv, Anz_Beo_rad	
Grobe_Fehler	v, s0, daten_niv, daten_rad, Pkt_name, Qvv, Anz_Beo_niv, Anz_Beo_rad	daten_niv, daten_rad
Matrizenerstellung	daten_niv, daten_rad	I, A, P, Mess_pkt, Anz_Beo, Anz_Beo_niv, Anz_Beo_rad, Anz_Pkt
Neue_Eingangsdaten	raus_pkt, regew, datei_niv, datei_rad	
Proben	A, P, v, Anz_Pkt, Qll, Anz_Beo, Qvv, I, x, Qxx, Ql_I_	
Rangdefekt	daten_niv, daten_rad	daten_abh_niv, daten_unabh_niv, daten_abh_rad, daten_unabh_rad

A.2 Implementierung der Kombination zweier Messreihen

Die Berechnungen für diese Auswertungen wurden ebenfalls in MATLAB[®] umgesetzt. Die Bestimmung der gesuchten Parameter erfolgte bei dieser Implementierung wiederum über einzelne Funktionen, in der die Berechnungsschritte voneinander getrennt aufgerufen oder wie im Flussdiagramm in Abbildung A.4 dargestellt als vollständige Berechnung durchgeführt werden.

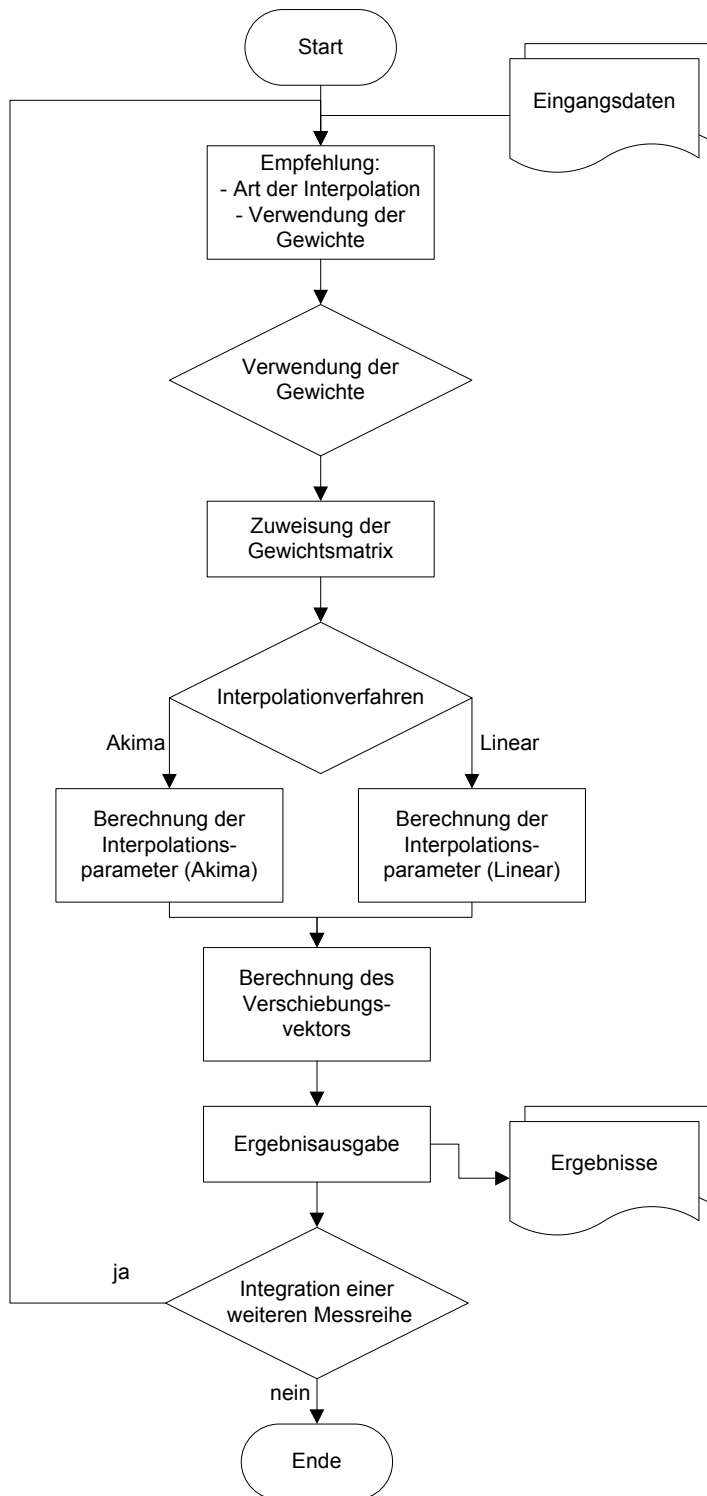


Abbildung A.4:
Flussdiagramm für die
Kombination zweier
Zeitreihen

Neben der Abfrage nach der Art der Interpolation wird ebenfalls nach der Verwendung der Gewichte gefragt. Diese werden dann zur Berechnung des Verschiebungsbetrags aus der gegenseitigen Lage der Punkte berechnet oder der Einheitsvektor zugewiesen.

Im Folgenden werden die einzelnen Funktionen kurz vorgestellt.

- `Dateneingabe_Einpassen.m`

Mittels dieser Funktion werden die zwei Datenreihen aus zwei Textdateien eingelesen. Die eingelesenen Daten werden vor einer weiteren Verarbeitung sortiert und auf doppelte Messwerte überprüft. Dadurch werden Berechnungen in Intervallen mit nicht chronologischem Ablauf vermieden.

- `Interpolation_empfehlen.m`

Hier wird überprüft, ob das Zusammenfügen nur über die ersten oder letzten Intervalle erfolgt. In diesen Fällen wird die lineare Interpolation empfohlen, da die Interpolation nach Akima in diesen Bereichen auf Extrapolation beruht.

- `Gewichte_berechnen.m`

Die Berechnung der Gewichte erfolgt durch die unter 3.1.3 vorgestellten Gleichungen. Anschließend wird geprüft, ob mindestens ein Gewicht im Vergleich mit den anderen sehr viel größer ist. Wenn dies auftritt, wird von der Verwendung der Gewichte abgeraten, da diese bei stark streuenden Messreihen den Verschiebungsbetrag v einseitig beeinflussen können.

- `Akima.m` und `Gerade.m`

Durch diese beiden Funktionen werden die Parameter der Interpolation bestimmt. Diese Parameter beziehen sich immer auf das zu interpolierende Intervall, wie die Gleichungen (3-1) und (3-7) zeigen. Aufgrund dieser gleichen Struktur lassen sich die Koeffizienten c in einer Matrix \mathbf{C} zusammenfassen. Diese wird unabhängig von der Art der Interpolation in den nachfolgenden Funktionen benutzt.

In der Funktion „akima“ wird die erste Messreihe wenn nötig durch zusätzlich Punkte erweitert, um Ecken an aufeinander stoßenden Geradenstücken abzurunden. In dieser Funktion wird ein Wert für β festgelegt. Die so erweiterte erste Messreihe wird ebenfalls in den folgenden Funktionen benutzt.

- `Einpassen_in_fkt.m`

Hier wird der Verschiebungsbetrag v berechnet. Er ist das gewichtete Mittel der Abstände der Ordinatenwerte der zweiten Messreihe vom interpolierten Verlauf.

- `Graph_Ausgabe.m`

In dieser letzten Funktion werden die Ergebnisse graphisch ausgegeben. Dabei werden die ursprünglichen Messreihen dargestellt, der Verlauf der Interpolation und die sich daraus ergebende neue Lage der zweiten Messreihe abgebildet.

Die Ausgabe der Ergebnisse erfolgt in einer Textdatei. Die Funktionen `Interpolation_empfehlen.m` und `Gewichte_berechnen.m` geben lediglich Empfehlungen zur Festlegung der Parameter der Auswertung. Für beide Entscheidungen erfolgt noch einmal eine Abfrage an den Benutzer. Erst danach wird der Verschiebungsbetrag v berechnet. Wird auf eine Verwendung der Gewichte verzichtet, wird \mathbf{P} der Einheitsvektor zugewiesen, um eine gleichartige Berechnung durchführen zu können.

Tabelle A.2: Ein- und Ausgangsvariablen der Funktionen

Funktion	Eingangsvariablen	Ausgabevariablen
Dateneingabe_Einpassen		M1, M2, datei_M1, datei_M2
Interpolation_empfehlen	M1, M2	
Gewichte_berechnen	M1, M2	P
Akima	M1	C, M1_erweitert
Gerade	M1	C
Einpassen_in_fkt	M1, M2, C, P	v
Graph_Ausgabe	M1, M1_erw, M2, C, v	